

## Ejercicios Resueltos para la guía de Trigonometría Construcción de triángulos.

Dado un triángulo ABC, completar sus valores suponiendo como parte de ellos:

- |  |  |
|--|--|
| 1.- $\alpha = 41^\circ$ $\gamma = 77^\circ$ $a = 10,5$         | $\left[ \text{R: } \beta = 62^\circ \quad b \approx 14.1 \quad c \approx 15.6 \right]$               |
| 2.- $\alpha = 27^\circ 40'$ $\beta = 52^\circ 10'$ $a = 32.4$  | $\left[ \text{R: } \gamma = 100^\circ 10' \quad b \approx 55.1 \quad c \approx 68.7 \right]$         |
| 3.- $\alpha = 42^\circ 10'$ $\gamma = 61^\circ 20'$ $b = 19.7$ | $\left[ \text{R: } \beta = 76^\circ 30' \quad a \approx 13.6 \quad c \approx 17.8 \right]$           |
| 4.- $\alpha = 60^\circ$ $b = 20$ $c = 30$                      | $\left[ \text{R: } a \approx 26 \quad \beta \approx 41^\circ \quad \gamma \approx 79^\circ \right]$  |
| 5.- $\gamma = 45^\circ$ $b = 10$ $a = 15$                      | $\left[ \text{R: } b \approx 180 \quad \alpha \approx 25^\circ \quad \gamma \approx 5^\circ \right]$ |

6.- Calcular el valor exacto de  $\sin(18)$  (es decir, sin usar calculadora).

R :

Como  $90 - 36 = 54$

aplico  $\sin(90 - 36) = \sin(54)$

aplicando identidades tengo que

$$\cos(36) = \sin(54)$$

de aquí podemos decir que

$$\cos(2 \times 18) = \sin(3 \times 18)$$

como:

$$\begin{aligned} \sin(3 \times 18) &= \sin(2 \times 18 + 18) \\ &= \sin(2 \times 18) \cos(18) + \cos(2 \times 18) \sin(18) \\ &= 2 \sin(18) \cos^2(18) + \sin(18) - 2 \sin^3(18) \\ &= \sin(18)(2 \cos^2(18) + 1 - 2 \sin^2(18)) \\ &= \sin(18)(2(\cos^2(18) - \sin^2(18)) + 1) \\ &= \sin(18)(2(1 - 2 \sin^2(18)) + 1) \\ &= 2 \sin(18) - 4 \sin^3(18) + \sin(18) \\ &= 3 \sin(18) - 4 \sin^3(18) \end{aligned}$$

luego

$$3 \sin(18) - 4 \sin^3(18) = 1 - 2 \sin^2(18)$$

sea  $x = \sin(18)$

$$3x + 2x^2 - 4x^3 = 0$$

esto se puede factorizar de la siguiente forma:

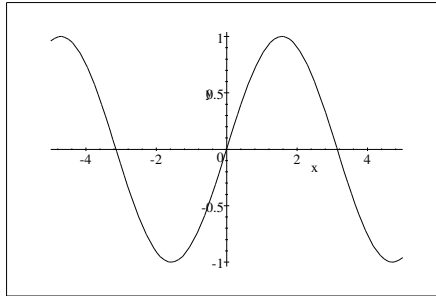
$$(x - 1)(4x^2 + 2x - 1)$$

de esto podemos concluir que:

$$x = 1$$

$$x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}$$

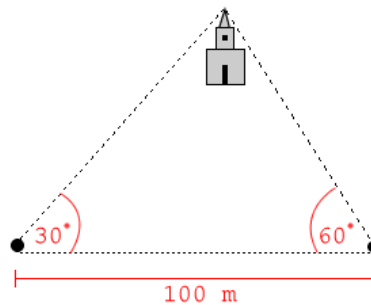
$$x = \frac{-1 - \sqrt{5}}{4}$$



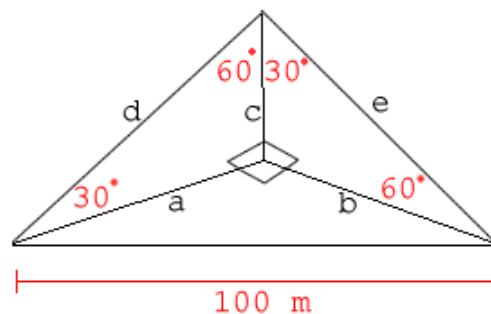
como el  $\sin(18)$  es positivo y no es igual a 1

luego el resultado es  $\sin(18) = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$

7.- Desde un punto  $A$  situado en el suelo se observa hacia un monte el campanario de una iglesia según un ángulo de elevación de  $30^\circ$  y desde un punto  $B$  situado en el suelo se observa el campanario hacia el oeste según un ángulo de elevación de  $60^\circ$ . Si la distancia entre  $A$  y  $B$  es  $100\text{ m}$ , calcule la altura del campanario.



R: Dada la relación del triángulo que se forma, se tiene que  $\sqrt{a^2 + b^2} = 100$ .  
Un esquema para ello:



Se tiene luego que

$$\tan(30) = \frac{c}{a}$$

$$\tan(60) = \frac{c}{b}$$

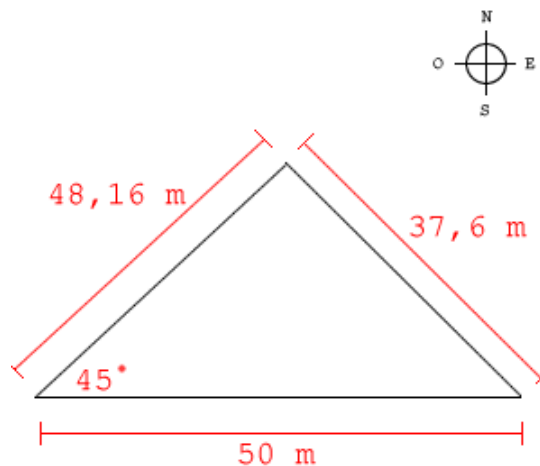
$$\begin{aligned} a &= \frac{c}{\tan(30)} & \Rightarrow & a^2 = \frac{c^2}{\tan^2(30)} \\ b &= \frac{c}{\tan(60)} & \Rightarrow & b^2 = \frac{c^2}{\tan^2(60)} \end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= c^2 \left( \frac{\tan^2(60) + \tan^2(30)}{\tan^2(30) \tan^2(60)} \right) \\ \Rightarrow c &= \sqrt{a^2 + b^2} \sqrt{\frac{\tan^2(30) \tan^2(60)}{\tan^2(60) + \tan^2(30)}} \\ \Rightarrow c &= 100 \tan(30) \tan(60) \sqrt{\frac{1}{\tan^2(60) + \tan^2(30)}} \\ \Rightarrow c &= 100 \sqrt{\frac{1}{3 + \frac{1}{3}}} \\ \Rightarrow &100 \sqrt{\frac{3}{10}} \end{aligned}$$

¡Y listo!

8.- Camina 50m hacia el oeste. Cuando llegues, inclínate en 45° hacia el noreste y camina 48,16m. Esto era sólo un juego, ¡toing!, ahora debes volver al comienzo sólo recorriendo 37,6m. ¿Qué ángulo debes tomar?



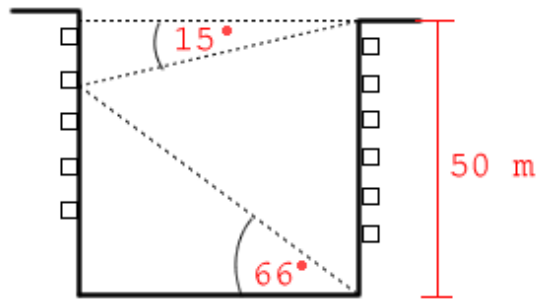
R: Al plantearnos el problema, deberíamos darnos cuenta que podemos utilizar el Teorema del Seno, haciendo la siguiente relación:

$$\frac{\sin(45)}{37,6} = \frac{\sin x}{50}$$

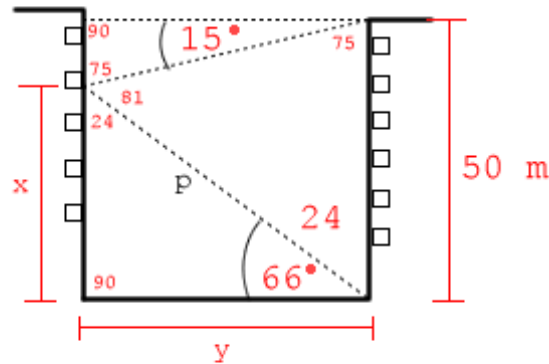
$$\Leftrightarrow \sin x = \frac{50 \sin(45)}{37,6}$$

$$\therefore x = 70$$

9.- Desde el techo de mi edificio miro a mi bella vecina en la ventana de su departamento, que está al frente, con ángulo de depresión de  $15^\circ$ . El portero de mi edificio también la mira, pero con un ángulo de elevación de  $66^\circ$ . Para llegar hasta ella, ¿Cuántos metros debo recorrer si mi edificio mide  $50m$  de alto?



R: Para resolver este ejercicio, debemos saber que lo que buscamos es  $x + y + 50$ .



Ahora bien, utilizando el teorema del seno, tenemos las siguientes relaciones:

$$\frac{\sin(75)}{p} = \frac{\sin(81)}{50}$$

$$\Rightarrow p = 48,89$$

Luego,

$$\frac{\sin(90)}{p} = \frac{\sin(66)}{x}$$

Por lo tanto

$$x = 44,66$$

Así, procediendo análogamente, puedes hallar y, para finalmente saber cuánto es  $x + y + 50$ .

10.- Julieta se encuentra en el balcón de su habitación a una altura de 60m, y a 100m sus ojos están de los de Romeo. La enamorada deja caer un beso perpendicularmente y el enamorado queda a 80m de él. ¿En qué ángulo Romeo comprende a Julieta y su beso?

R: Al reunir los datos, formamos un triángulo con lados 100, 60 y 80 metros. Utilizando el teorema del coseno:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

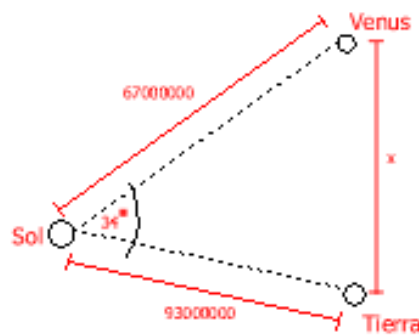
donde  $\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ , se tiene que

$$\alpha = \arccos\left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right)$$

Por esto nuestra respuesta es

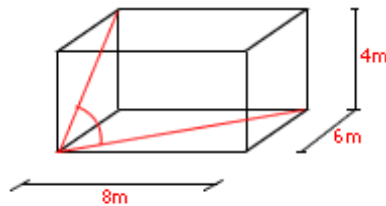
$$\alpha = \arccos\left(\frac{80^2 + 100^2 - 60^2}{2(80)(100)}\right)$$

11.- La distancia de la Tierra a los planetas cercanos se pueden aproximar mediante el ángulo de fase  $\alpha$ . Supongamos que la distancia de la Tierra al Sol es de 93000000 de millas, y la de Venus al Sol es de 67000000 de millas. Aproxima la distancia de la Tierra a Venus, al millón de millas más cercano, cuando  $\alpha = 34^\circ$ .



R: Aplicando el teorema del coseno obtenemos que la distancia es 52976729mi

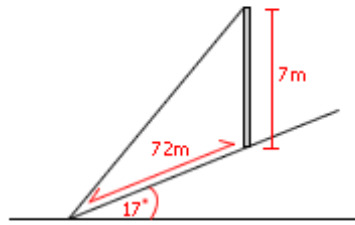
12.- La caja rectangular de la figura tiene dimensiones de  $8m \times 6m \times 4m$ . Calcula el ángulo  $\theta$  formado por una diagonal de la base y una diagonal del lado  $6m \times 4m$ .



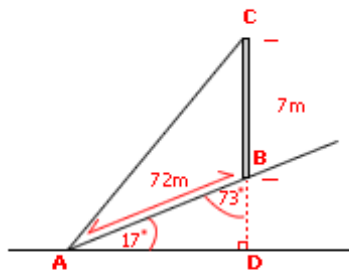
R: Aplicando teorema de Pitágoras y luego el teorema del coseno obtenemos que  $\theta \approx 60^\circ$ .

13.- Un poste vertical de 7 metros de altura está en una cuesta que forma un ángulo de  $17^\circ$  con la horizontal. Calcula la longitud mínima de cable que llegará de la parte superior del poste a un punto

a 72 metros cuesta abajo (medido desde la base del poste).



Para resolver este ejercicio consideraremos el siguiente esquema:



donde  $A, B, C, D$  son los vértices respectivos (a los triángulos dibujados). Si notamos, la medida del ángulo  $ABD$  resulta de calcular

$$180 - 17 - 90$$

Así obtenemos la medida del ángulo  $ABC$ . Luego, tengo las medidas de dos lados y un ángulo entre ellos en un triángulo, es decir

$$AB = 72$$

$$BC = 7$$

$$\angle ABC = 107^\circ$$

Con esto puedo usar el teorema del coseno, de la siguiente forma:

$$(AC)^2 = 7^2 + 72^2 - (7)(72)\cos 107$$

$\approx$

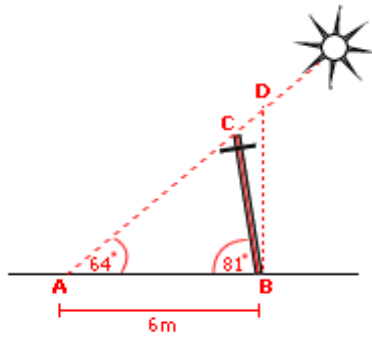
$$AC = \sqrt{5381.025} \approx 73.35$$

R: longitud mínima del cable  $\approx 73.35m$

14.- Cuando el ángulo de elevación del Sol es de  $64^\circ$ , un poste de teléfonos inclinado a un

ángulo de  $9^\circ$  en dirección opuesta al Sol arroja una sombra de  $6m$  de largo a nivel del suelo. Calcular la longitud del poste.

Apoyémonos en el siguiente esquema:



donde la medida del ángulo  $CBD$  es  $9^\circ$ .  
El ángulo  $ABC$  se obtiene de calcular

$$90 - 9$$

Luego obtengo la medida del ángulo  $ACB$ :

$$\triangle ACB = 180 - 64 - 81 = 35$$

Así por teorema del seno consigo el valor para  $BC$ , que es la longitud del poste:

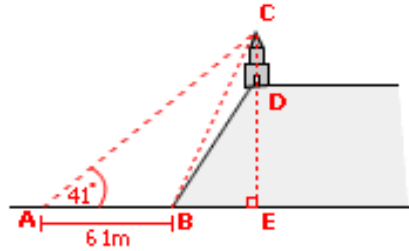
$$\frac{BC}{\sin 64} = \frac{6}{\sin 35} \Rightarrow BC \approx 9.40$$

R: longitud del poste  $\approx 9.40m$

15.- Una catedral se encuentra sobre una colina. Cuando se observa la parte superior del campanario desde la base de la colina, el ángulo de elevación es de  $48^\circ$ ; cuando se ve a una distancia de  $61m$  desde la base de la colina, es de  $41^\circ$ . La colina se eleva  $32m$ . Calcula la altura de la catedral.

Apoyémonos en el esquema:





donde el ángulo  $EBC$  mide  $48^\circ$  y el ángulo  $EBD$  mide  $32^\circ$ . Todos estos datos están presentes en el enunciado.

Ahora bien, con ellos obtenemos:

$$\angle CBD = 48 - 32 = 16$$

$$\angle ABC = 180 - 48 = 132$$

$$\angle ACB = 180 - 41 - 132 = 7$$

$$\angle BDE = 180 - 90 - 32 = 58$$

$$\angle BDC = 180 - 58 = 122$$

Así, por teorema del seno tenemos

$$\frac{\sin 7}{61} = \frac{\sin 41}{BC} \Rightarrow BC \approx 328.38$$

Por otro lado, el teorema del seno nos revela la longitud  $CD$ :

$$\frac{\sin 122}{328.38} = \frac{\sin 16}{CD} \Rightarrow CD \approx 106.73$$

R: altura de la catedral  $\approx 106.73m$