

Ejercicios resueltos de trigonometría

Identidades trigonométricas

1.- Demuestre la siguiente identidad indicando su dominio :

$$\frac{\cos 2\alpha + 2 \sin 2\alpha}{1 + \sin 2\alpha} + \left(\frac{\tan \alpha - 1}{\tan \alpha + 1} \right)^2 = \frac{2}{\tan \alpha + 1}$$

Dominio (o restricciones) de la identidad trigonométrica :

$$1 + \sin 2\alpha \neq 0 \wedge \cos \alpha \neq 0 \wedge \tan \alpha + 1 \neq 0$$

Encontraremos los valores prohibidos para α resolviendo las siguientes ecuaciones trigonométricas

$$1 + \sin 2\alpha = 0$$

$$\sin 2\alpha = -1$$

$$2\alpha = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\alpha = \frac{3\pi}{4} + k\pi$$

$$\cos \alpha = 0$$

$$\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\tan \alpha + 1 = 0$$

$$\tan \alpha = -1$$

$$\alpha = \frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Así podemos anotar el dominio de la identidad como

$$D = \mathbb{R} - \left\{ \frac{3\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \text{ o bien podemos anotar}$$

$$\text{Restricciones: } \alpha \neq \frac{3\pi}{4} + k\pi \wedge \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Acerca de la demostración :recuerde que no puede tratar a esta igualdad como si fuese una ecuación.

Por ejemplo,no puede restar términos a ambos lados de la igualdad,ya que en este caso,está asumiendo que la igualdad se cumple,y es ésto precisamente lo que se debe demostrar.

Una forma de demostrar es partir de uno de los miembros de la igualdad,por ejemplo el del lado izquierdo (por lo general conviene elegir el miembro mas extenso o mas complicado), y comenzar a dar expresiones equivalentes a él (apoyándose en identidades conocidas),hasta formar el miembro del lado derecho.

Demostración :

$$\frac{\cos 2\alpha + 2 \sin 2\alpha}{1 + \sin 2\alpha} + \left(\frac{\tan \alpha - 1}{\tan \alpha + 1} \right)^2 = \frac{2 \cos^2 \alpha - 1 + 4 \sin \alpha \cos \alpha}{1 + 2 \sin \alpha \cos \alpha} + \left(\frac{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} - 1}{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + 1} \right)^2$$

sabemos: $1 = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha$

$$= \frac{2 \cos^2 \alpha - 1 + 4 \sin \alpha \cos \alpha}{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha} + \left(\frac{\frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{\cos \alpha}}{\frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\cos \alpha}} \right)^2$$

como de las restricciones, $\cos \alpha \neq 0$, podemos simplificar

$$\begin{aligned} &= \frac{2 \cos^2 \alpha - 1 + 4 \sin \alpha \cos \alpha}{\sin^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha} + \left(\frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha} \right)^2 \\ &= \frac{2 \cos^2 \alpha - 1 + 4 \sin \alpha \cos \alpha}{(\sin \alpha + \cos \alpha)^2} + \frac{(\sin \alpha - \cos \alpha)^2}{(\sin \alpha + \cos \alpha)^2} \\ &= \frac{2 \cos^2 \alpha - 1 + 4 \sin \alpha \cos \alpha + \sin^2 \alpha - 2 \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha}{(\sin \alpha + \cos \alpha)^2} \\ &= \frac{2 \cos^2 \alpha + 4 \sin \alpha \cos \alpha - 2 \sin \alpha \cos \alpha + \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - 1}{(\sin \alpha + \cos \alpha)^2} \\ &= \frac{2 \cos^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha + 1 - 1}{(\sin \alpha + \cos \alpha)^2} \\ &= \frac{2 \cos \alpha (\cos \alpha + \sin \alpha)}{(\sin \alpha + \cos \alpha)^2} \end{aligned}$$

Descubra cual es la restricción que permite afirmar :

$$\sin \alpha + \cos \alpha \neq 0$$

Así podemos simplificar :

$$= \frac{2 \cos \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha}$$

Como $\cos \alpha \neq 0$ podemos efectuar la siguiente amplificación :

$$\begin{aligned} &= \frac{2 \cos \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha} \cdot \frac{\frac{1}{\cos \alpha}}{\frac{1}{\cos \alpha}} \\ &= \frac{2}{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + 1} \\ &= \frac{2}{\tan \alpha + 1} \end{aligned}$$

Quedando entonces demostrado.(Q.E.D.)

2.- Demuestre la siguiente identidad trigonométrica :

$$\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha = 1 - \frac{3}{4} (\sin 2\alpha)^2$$

Como el dominio de la función seno y de la función coseno es todo \mathbb{R} , la identidad no presenta restricciones.

Dem:

$$\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha = (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)(\sin^4 \alpha - \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + \cos^4 \alpha)$$

ocupamos la fórmula de factorización : $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

$$\begin{aligned}
 &= 1 \cdot (\sin^4 \alpha + 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + \cos^4 \alpha - 3 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha) \\
 &= (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2 - 3 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha \\
 &= 1 - 3(\sin \alpha \cos \alpha)^2 \\
 &= 1 - 3\left(\frac{2}{2} \cdot \sin \alpha \cos \alpha\right)^2 \\
 &= 1 - \frac{3}{4}(2 \cdot \sin \alpha \cos \alpha)^2 \\
 &= 1 - \frac{3}{4}(\sin 2\alpha)^2
 \end{aligned}$$

3.- Demuestre : $\frac{\tan \alpha}{1 - \cot \alpha} - \frac{\cot \alpha}{\tan \alpha - 1} = 1 + \tan \alpha + \cot \alpha$

Restricciones: $\cos \alpha \neq 0 \wedge \sin \alpha \neq 0 \wedge 1 - \cot \alpha \neq 0 \wedge \tan \alpha - 1 \neq 0$

Luego $\alpha \neq k \cdot \frac{\pi}{2} \wedge \alpha \neq \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Dem:

$$\begin{aligned}
 \frac{\tan \alpha}{1 - \cot \alpha} - \frac{\cot \alpha}{\tan \alpha - 1} &= \frac{\tan \alpha}{1 - \frac{1}{\tan \alpha}} - \frac{\frac{1}{\tan \alpha}}{\tan \alpha - 1} \\
 &= \frac{\tan \alpha}{\frac{\tan \alpha - 1}{\tan \alpha}} - \frac{1}{\tan \alpha(\tan \alpha - 1)} \\
 &= \frac{\tan^2 \alpha}{\tan \alpha - 1} - \frac{1}{\tan \alpha(\tan \alpha - 1)} \\
 &= \frac{1}{\tan \alpha - 1} \left(\tan^2 \alpha - \frac{1}{\tan \alpha} \right) \\
 &= \frac{1}{\tan \alpha - 1} \left(\frac{\tan^3 \alpha - 1}{\tan \alpha} \right) \\
 &= \frac{1}{\tan \alpha - 1} \cdot \frac{(\tan \alpha - 1)(\tan^2 \alpha + \tan \alpha + 1)}{\tan \alpha} \\
 &= \frac{\tan^2 \alpha + \tan \alpha + 1}{\tan \alpha} \\
 &= \frac{\tan^2 \alpha}{\tan \alpha} + \frac{\tan \alpha}{\tan \alpha} + \frac{1}{\tan \alpha} \\
 &= \tan \alpha + 1 + \cot \alpha
 \end{aligned}$$

Revise si las simplificaciones efectuadas estan autorizadas por las restricciones.

4.- Demuestre que $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4 \cdot \sin A \cdot \sin B \cdot \sin C$
si se sabe que $A + B + C = \pi$

No tenemos restricciones y podemos ocupar la relación dada entre los ángulos : $A + B + C = \pi$,de la siguiente forma :

$$C = \pi - (A + B) \text{ y } A + B = \pi - C$$

Dem:

$$\begin{aligned}\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C &= 2 \sin \frac{2A+2B}{2} \cdot \cos \frac{2A-2B}{2} + \sin 2(\pi - (A + B)) \\ &= 2 \sin(A + B) \cdot \cos(A - B) + \sin(2\pi - 2(A + B))\end{aligned}$$

La función seno tiene período 2π

$$= 2 \sin(A + B) \cdot \cos(A - B) + \sin(-2(A + B))$$

La función seno es impar

$$\begin{aligned}&= 2 \sin(A + B) \cdot \cos(A - B) - \sin 2(A + B) \\ &= 2 \sin(A + B) \cdot \cos(A - B) - 2 \sin(A + B) \cos(A + B) \\ &= -2 \sin(A + B)(\cos(A + B) - \cos(A - B)) \\ &= -2 \sin(A + B) \cdot -2 \sin A \cdot \sin B \\ &= 4 \sin A \sin B \sin(A + B)\end{aligned}$$

Pero $A + B = \pi - C$

$$\begin{aligned}&= 4 \sin A \sin B \sin(\pi - C) \\ &= 4 \sin A \sin B \sin C\end{aligned}$$

Revise su cuaderno de cátedra para identificar las identidades ocupadas en la demostración.

Ecuaciones trigonométricas

1.- Hallar la solución general de la ecuación :

$$\cos 6x + \cos 2x + 2 \cos 4x \sin 2x = 0$$

Acerca de la restricción : aunque no se pida determinar las restricciones, al resolver una ecuación esto es lo primero que usted debe revisar, pues dichas restricciones pueden provocar un futuro **descarte** de las soluciones que encuentre para la ecuación.

En esta ecuación no tenemos restricciones, luego resolvemos

en \mathbb{R}

$$\begin{aligned}\cos 6x + \cos 2x + 2 \cos 4x \sin 2x &= 0 \\ 2 \cos \frac{6x+2x}{2} \cos \frac{6x-2x}{2} + 2 \cos 4x \sin 2x &= 0 \\ 2 \cos 4x \cos 2x + 2 \cos 4x \sin 2x &= 0 \\ 2 \cos 4x (\cos 2x + \sin 2x) &= 0 \\ \cos 4x (\cos 2x + \sin 2x) &= 0 \\ \cos 4x = 0 \quad \vee \quad \cos 2x + \sin 2x &= 0\end{aligned}$$

Resolvemos las ecuaciones :

$$\begin{aligned}\cos 4x &= 0 & \vee & & \cos 2x + \sin 2x &= 0 \\ 4x &= \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} & & & \sin 2x \cdot 1 + 1 \cdot \cos 2x &= 0 \quad / \cdot \frac{1}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

$$\boxed{x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}} \quad \sin 2x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \cos 2x = 0$$

Recuerde que existen otras opciones .

$$\sin 2x \cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{4} \cos 2x = 0$$

$$\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

$$2x + \frac{\pi}{4} = k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$2x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\boxed{x = -\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}}$$

$$S = \left\{ \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}, -\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

2.- Determine las soluciones en el intervalo $[0, \pi]$
de la siguiente ecuación trigonométrica :

$$\sin 2x = \frac{\sqrt{3} \tan 3x}{\csc 2x}$$

Restricciones :

$$\cos 3x \neq 0 \text{ (para que exista la tangente)} \quad \wedge$$

$$\sin 2x \neq 0 \text{ (para que exista la cosecante)}$$

$$\text{Así } 3x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \wedge 2x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\boxed{x \neq \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3} \wedge x \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}}$$

Resolvemos :

$$\sin 2x = \frac{\sqrt{3} \tan 3x}{\csc 2x}$$

$$\sin 2x = \frac{\sqrt{3} \tan 3x}{\frac{1}{\sin 2x}}$$

$$\sin 2x = \sqrt{3} \sin 2x \tan 3x$$

$$\sin 2x - \sqrt{3} \sin 2x \tan 3x = 0$$

$$\sin 2x (1 - \sqrt{3} \tan 3x) = 0$$

$$\sin 2x = 0 \quad \vee \quad 1 - \sqrt{3} \tan 3x = 0$$

Por la restricción se descartan las soluciones de $\sin 2x = 0$

$$\text{Resolvemos } 1 - \sqrt{3} \tan 3x = 0$$

$$1 = \sqrt{3} \tan 3x$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \tan 3x$$

Como la tangente es positiva para ángulos del primer y tercer cuadrante, tenemos que :

$$(I) \quad 3x = \frac{\pi}{6} + k\pi \quad (\text{recuerde que la tangente tiene período } \pi)$$

$$x = \frac{\pi}{18} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

$$(III) \quad 3x = \frac{7\pi}{6} + k\pi$$

$$x = \frac{7\pi}{18} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

Veamos ahora cuales de estas soluciones estan en el intervalo $[0, \pi]$

$$\begin{aligned} (I) \quad 0 &\leq \frac{\pi}{18} + \frac{k\pi}{3} \leq \pi \quad / \cdot \frac{1}{\pi} \\ 0 &\leq \frac{1}{18} + \frac{k}{3} \leq 1 \quad / - \frac{1}{18} \\ -\frac{1}{18} &\leq \frac{k}{3} \leq 1 - \frac{1}{18} \\ -\frac{1}{18} &\leq \frac{k}{3} \leq \frac{17}{18} \quad / \cdot 3 \\ -\frac{3}{18} &\leq k \leq \frac{51}{18} \end{aligned}$$

Los valores enteros para k son 0, 1, 2

Las soluciones para (I) son $\frac{\pi}{18}, \frac{\pi}{18} + \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{18} + \frac{2\pi}{3}$

$$\begin{aligned} (III) \quad 0 &\leq \frac{7\pi}{18} + \frac{k\pi}{3} \leq \pi \quad / \cdot \frac{1}{\pi} \\ 0 &\leq \frac{7}{18} + \frac{k}{3} \leq 1 \quad / - \frac{7}{18} \\ -\frac{7}{18} &\leq \frac{k}{3} \leq 1 - \frac{7}{18} \quad / \cdot 3 \\ -\frac{21}{18} &\leq k \leq \frac{33}{18} \end{aligned}$$

Los valores enteros para k son -1, 0, 1

Las soluciones para (III) son $\frac{7\pi}{18} - \frac{\pi}{3}, \frac{7\pi}{18}, \frac{7\pi}{18} + \frac{\pi}{3}$

Las soluciones pedidas son :

$$S = \left\{ \frac{\pi}{18}, \frac{7\pi}{18}, \frac{13\pi}{18} \right\}$$

