



1ª Prueba de Álgebra y Geometría

Indicaciones:

- Todos los materiales a utilizar durante la prueba son de uso individual.
- Dispone de 10 minutos para hacer preguntas sobre la comprensión de los ejercicios.
- El tiempo total para resolver la prueba es de 90 minutos.
- Justifique todas sus respuestas.
- Sea claro y ordenado en sus desarrollos.
- Apague los celulares.
- Cada pregunta tiene 15 puntos.

1. Sabiendo que los ángulos α y β están en el intervalo $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} \right]$ y que $\sin(\alpha) = \frac{3}{5}$ y que $\tan(\beta) = -\frac{5}{12}$, determine el valor exacto de:

$$\tan(\alpha - \beta)$$

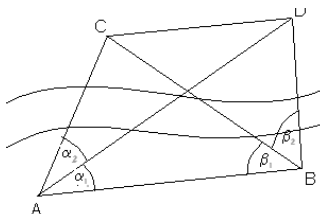
2. Pruebe la siguiente identidad trigonométrica, indicando sus restricciones:

$$\frac{2 + \sin(4\theta)}{2} = \frac{\sin^3(2\theta) - \cos^3(2\theta)}{\sin(2\theta) - \cos(2\theta)}$$

3. Resuelva cada una de las siguientes ecuaciones entregando las soluciones particulares y generales:

- $\sin x \tan(2x) - \sqrt{3} \cos x \tan(2x) = \sqrt{2} \tan(2x)$
- $\arccos(7x) = 2 \arcsin(2x)$

4. Desde una orilla de un río se necesita conocer la distancia entre dos puntos C y D ubicados en la orilla opuesta del río. Se conoce la distancia AB y los ángulos $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1$ y β_2 . Determine la distancia entre C y D en términos de los ángulos conocidos y la distancia AB .



”La Geometría es el arte de pensar bien, y dibujar mal” *Poincaré*

”Un Matemático dice A, escribe B, quiere decir C, pero lo que significa es D.

Y de hecho D es una idea espléndida que emerge al poner orden en la confusión.” *M.Klein*

Desarrollo

1. Sabiendo que los ángulos α y β están en el intervalo $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ y que $\sin(\alpha) = \frac{3}{5}$ y que $\tan(\beta) = -\frac{5}{12}$, determine el valor exacto de:

$$\tan(\alpha - \beta)$$

En este caso tenemos que α está en el 2° cuadrante y que β está en el 3° también. Además $\tan \alpha = -\frac{3}{4}$ y como

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} = \frac{-\frac{3}{4} + \frac{5}{12}}{1 + \left(-\frac{3}{4}\right) \cdot \left(-\frac{5}{12}\right)} = -\frac{16}{63}$$

2. Pruebe la siguiente identidad trigonométrica, indicando sus restricciones:

$$\frac{2 + \sin(4\theta)}{2} = \frac{\sin^3(2\theta) - \cos^3(2\theta)}{\sin(2\theta) - \cos(2\theta)}$$

Restricciones:

$$\sin(2\theta) - \cos(2\theta) \neq 0 \Rightarrow \tan(2\theta) \neq 1 \Rightarrow 2\theta \neq \frac{\pi}{4} + k\pi \Rightarrow \theta \neq \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}$$

Ahora, note que:

$$\begin{aligned} \frac{\sin^3(2\theta) - \cos^3(2\theta)}{\sin(2\theta) - \cos(2\theta)} &= \frac{(\sin(2\theta) - \cos(2\theta))(\sin^2(2\theta) + \sin(2\theta)\cos(2\theta) + \cos^2(2\theta))}{\sin(2\theta) - \cos(2\theta)} \\ &= 1 + \sin(2\theta)\cos(2\theta) \\ &= \frac{2 + 2\sin(2\theta)\cos(2\theta)}{2} \\ &= \frac{2 + \sin(4\theta)}{2} \end{aligned}$$

3. Resuelva cada una de las siguientes ecuaciones entregando las soluciones particulares y generales:

a. Restricciones: $\cos(2x) \neq 0 \Rightarrow 2x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$; donde $k \in \mathbb{Z}$.

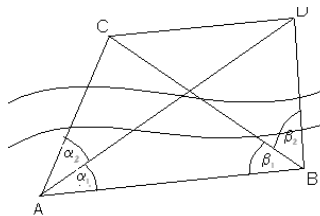
Ahora notamos que:

$$\begin{aligned}
& \sin x \tan(2x) - \sqrt{3} \cos x \tan(2x) = \sqrt{2} \tan(2x) \Leftrightarrow \\
& \sin x \tan(2x) - \sqrt{3} \cos x \tan(2x) - \sqrt{2} \tan(2x) = 0 \Leftrightarrow \\
& (\sin x - \sqrt{3} \cos x - \sqrt{2}) \tan(2x) = 0 \Leftrightarrow \\
& \sin x - \sqrt{3} \cos x - \sqrt{2} = 0 \vee \tan(2x) = 0 \Leftrightarrow \\
& \sin x - \sqrt{3} \cos x = \sqrt{2} \vee \sin(2x) = 0 \Leftrightarrow \\
& \frac{1}{2} \sin x - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \vee 2x = k\pi \Leftrightarrow \\
& \cos\left(\frac{-\pi}{3}\right) \sin x + \sin\left(\frac{-\pi}{3}\right) \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \vee x = \frac{k\pi}{2} \Leftrightarrow \\
& \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \vee x = \frac{k\pi}{2} \Leftrightarrow \\
& x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee x = \frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee x = \frac{k\pi}{2} \Leftrightarrow \\
& x = \frac{7\pi}{12} + 2k\pi \vee x = \frac{13\pi}{12} + 2k\pi \vee x = \frac{k\pi}{2}
\end{aligned}$$

- a. Restricción: $|7x| \leq 1 \wedge |2x| \leq 1 \Rightarrow x \in [-1/7; 1/7]$. Luego, aplicando la función *coseno*, tenemos que:

$$\begin{aligned}
& : \arccos(7x) = 2 \arcsin(2x) \quad / \cos \\
& \Rightarrow \cos(\arccos 7x) = \cos(2 \arcsin(2x)) \\
& \Rightarrow 7x = 1 - 2 \sin^2(\arcsin(2x)) \\
& \Rightarrow 7x = 1 - 2(2x)^2 \\
& \Rightarrow 7x = 1 - 8x^2 \\
& \Rightarrow 8x^2 + 7x - 1 = 0 \\
& \Rightarrow (8x - 1)(x + 1) = 0 \\
& \Rightarrow x = 1/8 \vee x = -1 \\
& \Rightarrow S_x = \{1/8\}
\end{aligned}$$

4. Desde una orilla de un río se necesita conocer la distancia entre dos puntos C y D ubicados en la orilla opuesta del río. Se conoce la distancia AB y los ángulos $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1$ y β_2 . Determine la distancia entre C y D en términos de los ángulos conocidos y la distancia AB .



5. Tenemos que se el ángulo $\angle ADB = \pi - (\alpha_1 + \beta_1 + \beta_2)$ y así, usando el teorema del seno:

$$AD = \sin(\beta_1 + \beta_2) \cdot \frac{AB}{\sin(\pi - (\alpha_1 + \beta_1 + \beta_2))}$$

Además, tenemos que se el ángulo $\angle ACB = \pi - (\alpha_1 + \alpha_2 + \beta_1)$ y así, usando el teorema del seno:

$$AC = \sin(\beta_1) \cdot \frac{AB}{\sin(\pi - (\alpha_1 + \alpha_2 + \beta_1))}$$

Finalmente en el triángulo $\triangle ABC$ podemos usar el teorema del coseno y encontramos que

$$CD = \sqrt{AD^2 + AC^2 - 2(AD)(AC)\cos(\alpha_2)}$$