

Ejercicios resueltos de polinomios

1.- Si al dividir $x^3 + bx^2 + cx + d$ por $(x + p)^2$ se obtiene exactamente $x + a$, demuestre que :

- a) $b - 2p = a$
- b) $c - p^2 = 2ap$
- c) $d = p^2a$

$$R: x^3 + bx^2 + cx + d = (x + p)^2(x + a)$$

$$x^3 + bx^2 + cx + d = (x^2 + 2px + p^2)(x + a)$$

$$x^3 + bx^2 + cx + d = x^3 + ax^2 + 2px^2 + 2apx + p^2x + p^2a$$

Aplicando la igualdad entre dos polinomios tenemos que:

$$b = a + 2p \Rightarrow b - 2p = a \quad (a)$$

$$c = 2ap + p^2 \Rightarrow c - p^2 = 2ap \quad (b)$$

$$d = p^2a \quad (c)$$

2.- Sea $P(x) = x^3 - m^2x^2 - mx + 6$ y suponga que $x - 3$ divide a $P(x)$ con resto 15. Hallar m .

$$R: \text{Por teorema del resto } P(3) = 15$$

$$\text{Pero } P(3) = 27 - m^2 * 9 - m * 3 + 6 = 15 \text{ de donde}$$

$$-9m^2 - 3m + 33 = 15$$

$$3m^2 + m - 6 = 0$$

$$\text{Así } m = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 * 3 * -6}}{2 * 3} = \frac{-1 \pm \sqrt{73}}{6}$$

3.- Determine los valores de c y k en \mathbb{R} tal que al dividir $3x^3 + 2x^2 + cx - k$ por $x + 2$ y $x - 1$ se obtenga resto 37 y -2 respectivamente.

$$R: P(-2) = 37 \Rightarrow 3 * -8 + 2 * 4 + c * -2 - k = 37 \Leftrightarrow 2c + k = -53$$

$$P(1) = -2 \Rightarrow 3 + 2 + c - k = -2 \Leftrightarrow c - k = -7$$

$$\text{Resolviendo el sistema } \left. \begin{array}{l} 2c + k = -53 \\ c - k = -7 \end{array} \right\} \text{ obtenemos } c = 20 \text{ y } k = -13$$

$$4.- \text{Sea } P(x) = 3x^4 - 5ax^3 + 7cx^2 - 1$$

Determine los valores de a y c en \mathbb{R} tal que 1 sea raíz de $P(x)$ y que al dividir $P(x)$ por $x + 1$ el resto sea 10

$$R: P(1) = 0 \Leftrightarrow 3 - 5a + 7c - 1 = 0 \Leftrightarrow -5a + 7c = -2$$

$$P(-1) = 10 \Leftrightarrow 3 + 5a + 7c - 1 = 10 \Leftrightarrow 5a + 7c = 8$$

Resolviendo el sistema
$$\begin{cases} -5a + 7c = -2 \\ 5a + 7c = 8 \end{cases}$$
 se obtiene $a = 1$ y $c = \frac{3}{7}$

5.-Sea $P(x) = 2x^3 + bx^2 + cx + d$. Determine los valores de b, c y d en \mathbb{R} de modo que se cumplan simultáneamente las tres condiciones siguientes:

- a) el resto al dividir $P(x)$ por x sea igual a $2 + b$
- b) el resto al dividir $P(x)$ por $x + 1$ sea igual a $b + d$
- c) 1 sea una raíz de $P(x)$

R: a) $P(0) = 2 + b \Leftrightarrow d = 2 + b$
 b) $P(-1) = b + d \Leftrightarrow -2 + b - c + d = b + d \Leftrightarrow c = -2$
 c) $P(1) = 0 \Leftrightarrow 2 + b + c + d = 0 \Leftrightarrow b + d = 0$
 Así $b = -1, d = 1, c = -2$

6.-Sea $P(x)$ un polinomio tal que $\deg(P(x)) \geq 3$.

Se sabe que: al dividir $P(x)$ por $x - 3$ el resto es 2

2 es una raíz de $P(x)$

$$P(4) = 6$$

Encuentre el resto al dividir $P(x)$ por $(x - 2)(x - 3)(x - 4)$

R: $P(3) = 2 \Leftrightarrow P(x) = (x - 3)Q(x) + 2$
 $P(2) = 0 \Leftrightarrow P(x) = (x - 2)Q'(x)$
 $P(4) = 6 \Leftrightarrow P(x) = (x - 4)Q''(x) + 6$
 $P(x) = (x - 2)(x - 3)(x - 4)Q'''(x) + R(x)$
 Es decir $P(x) : \underbrace{(x - 2)(x - 3)(x - 4)}_{\substack{R(x) \\ \text{grado 2}}} = \underbrace{Q'''(x)}_{\text{grado 3}}$

sea $R(x) = ax^2 + bx + c$

$$R(2) = P(2) = 4a + 2b + c = 0$$

$$R(4) = P(4) = 16a + 4b + c = 6$$

$$R(3) = P(3) = 9a + 3b + c = 2$$

Resolviendo el sistema se obtiene que: $a = 1, b = -3, c = 2$

Así el resto pedido es: $R(x) = x^2 - 3x + 2$

7.-Determine un polinomio de tercer grado con coeficientes enteros tal que $-2 + 5i$ y $\frac{3}{2}$ sean raíces del polinomio.

R: Sea $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ el polinomio

Como los coeficientes son enteros $P(x) \in \mathbb{Z}[X] \subseteq \mathbb{R}[X]$

y en $\mathbb{R}[X]$ si $-2 + 5i$ es una raíz también lo es el conjugado $-2 - 5i$

$$\text{Así } P(x) = (x - (-2 + 5i))(x - (-2 - 5i))\left(x - \frac{3}{2}\right)$$

Si desarrollamos éste producto obtenemos el polinomio

$$x^3 + \frac{5}{2}x^2 + 23x - \frac{87}{2}, \text{ que es un polinomio con coeficientes en } \mathbb{Q}$$

Pero como las raíces de $P(x)$ son las mismas que las de $2P(x)$ amplificando el polinomio por 2 obtenemos el polinomio pedido

$$P(x) = 2x^3 + 5x^2 + 46x - 87$$

$$8.-\text{Sea } P(x) = x^6 - x^5 - 5x^4 + 5x^3 - 36x^2 + 36x$$

a) Determine las raíces racionales de $P(x)$

b) Factorice $P(x)$ como producto de polinomios irreducibles en $\mathbb{R}[X]$

c) Factorice $P(x)$ como producto de polinomios irreducibles en $\mathbb{C}[X]$

$$R: P(x) = x(x^5 - x^4 - 5x^3 + 5x^2 - 36x + 36)$$

Luego 0 es una raíz en \mathbb{Q}

Buscaremos las raíces racionales de $x^5 - x^4 - 5x^3 + 5x^2 - 36x + 36$

$$d(36) = \pm\{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$$

$$d(1) = \pm\{1\}$$

Posibles raíces racionales $\pm\{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$

$$\begin{array}{r} \text{Efectuando división sintética,} \end{array} \begin{array}{r} 1 \quad -1 \quad -5 \quad 5 \quad -36 \quad 36 \\ 1 \quad 1 \quad 0 \quad -5 \quad 0 \quad -36 \quad 0 \end{array}$$

$$\text{Así } P(x) = x(x-1)\left(\underbrace{x^4 - 5x^2 - 36}_{\text{dividimos sintéticamente}}\right)$$

$$\begin{array}{r} 1 \quad 0 \quad -5 \quad 0 \quad -36 \\ 3 \quad 1 \quad 3 \quad 4 \quad 12 \quad 0 \end{array}$$

$$\text{Así } P(x) = x(x-1)(x-3)\left(\underbrace{x^3 + 3x^2 + 4x + 12}_{\text{dividimos sintéticamente}}\right)$$

$$\begin{array}{r} 1 \quad 3 \quad 4 \quad 12 \\ -3 \quad 1 \quad 0 \quad 4 \quad 0 \end{array}$$

$$\text{Así } P(x) = x(x-1)(x-3)(x+3)(x^2+4)$$

a) Las raíces racionales son 0, 1, 3, -3

b) Descomposición en $\mathbb{R}[X]$

$$P(x) = x(x-1)(x-3)(x+3)(x^2+4)$$

c) Descomposición en $\mathbb{C}[X]$

$$P(x) = x(x-1)(x-3)(x+3)(x-2i)(x+2i)$$