

Polinomios

A continuación enunciaremos unos teoremas sobre polinomios, que te ayudaran para saber la existencia de raices reales , cotas para ellas y la cantidad.. Luego veremos un ejemplo donde aplicaremos estos teoremas.

Teorema 1 . Existencia de raices reales

Si $p(x) \in R[x]$ y si $p(a), p(b)$ son de signos opuestos , existe una raiz real entre a y b .

Teorema 2. Cotas de raices reales para polinomios reales.

Si $p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$, con $a_n \geq 0, a_i \in R$ y $p(x)$ se divide por $x - r$ usando división sintética , entonces :

1. si $r \geq 0$ y todos los numeros de la ultima fila de la división sintética son positivos (coeficientes descendientes y residuos) mayores o iguales a cero entonces cualquier raiz de $p(x)$, a , se si tiene que $a \leq r$.
2. si $r \leq 0$ y todos los numeros de la ultima fila de la división sintética alternan de signo, (se considera $+0$ o -0) entonces si a es una raiz de $p(x)$ entonces $r \leq a$.

Teorema 3. Cantidad de raices reales

El número de raices positivas reales que tiene un polinomio real es igual al número de variaciones de signo de $p(x)$ o menor en un número par que el numero mencionado antes..

El numero de raices negativas reales que tiene un polinomio real es igual al número de variaciones de signo de $p(-x)$, o o menor en un número par que el numero mencionado antes

¿Cuales son las variaciones de signo de $p(x)$?.: donde $p(x) = x^7 - 7x^4 - 2x^3 + 5x^2 + x + 1$

El número de variaciones de signo de $p(x)$ es 2 (pues el coeficiente que acompaña a x^7 es positivo, y el que acompaña a x^4 es negativo (ahi va 1), el de x^3 es negativo , luego no aporta , pero el que acompaña a x^2 es positivo (ahi va otra variacion de signo , por lo tanto tengo 2), y el resto de los coeficientes son positivos , asi no hay otro cambio). Note que no importo que no aparecieran los terminos x^6 y x^5 .

Asi tiene 2 o 0 raices reales positivas.

El número de variaciones de signo de $p(-x)$ es 3 ($p(-x) = -x^7 - 7x^4 + 2x^3 + 5x^2 - x + 1$)

Asi tiene 3 o 1 raices reales negativas.

Ejemplo

Descomponga el polinomio $p(x) = 8x^4 + 30x^3 + 28x^2 - 2x - 30$ encontrando todas sus raices

1. usando el teorema 3 determinamos la cantidad de raices reales
Tiene 1 raiz positiva , y 3 o 1 negativas
2. Haremos división sintética para ver la existencia y cotas de las raices

	8	30	29	-2	-30	
1	8	38	67	65	35	1 es cota superior (por teorema 2)
0	8	30	29	-2	-30	Hay una raiz en (0, 1) (por teorema 1 $p(1) = 35$ y $p(0) = -30$)
-1	8	22	7	-9	-21	
-2	8	14	1	-4	-22	
-3	8	6	11	-35	75	Hay una raiz en (-3, -2) (por teorema 1)
-4	8	-2	37	-150	570	-4 es cota inferior de las raices

3. Las raices racionales de $p(x)$ son de la forma $\frac{r}{s}$, donde
 r es un divisor (positivo o negativo) de a_0 , que en este caso es -30 (pero da lo mismo ver los divisores de 30)
 s es un divisor (positivo o negativo) de a_n , que en este caso es 8

Asi las posibles raices son:

$$\left\{ \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 5, \pm 6, \pm 10, \pm 15, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{4}, \pm \frac{1}{8}, \pm \frac{3}{2}, \pm \frac{3}{4}, \pm \frac{3}{8}, \pm \frac{5}{2}, \pm \frac{5}{4}, \pm \frac{5}{8}, \pm \frac{15}{4}, \pm \frac{15}{8} \right\}$$

Pero como sabemos que las raices estan entre $(-4, 1)$ se tiene que el conjunto anterior se reduce a :

$$\left\{ \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{4}, \pm \frac{1}{8}, -\frac{3}{2}, \pm \frac{3}{4}, \pm \frac{3}{8}, -\frac{5}{2}, -\frac{5}{4}, \pm \frac{5}{8}, -\frac{15}{4}, -\frac{15}{8} \right\}.$$

Sabemos que hay una raiz positiva en el intervalo $(0, 1)$, las posibilidades racionales son

$$\left\{ \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{3}{8}, \frac{1}{2}, \frac{5}{8}, \frac{3}{4} \right\}$$

Veamos si $\frac{1}{2}$ es raiz

	8	30	29	-2	-30
$\frac{1}{2}$	8	34	46	21	$-\frac{39}{2}$

Asi la raiz positiva esta entre $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$, asi las posibilidades son : $\frac{5}{8}$ ó $\frac{3}{4}$

	8	30	29	-2	-30
$\frac{3}{4}$	8	36	56	40	0

4. Asi

$$\begin{aligned} 8x^4 + 30x^3 + 28x^2 - 2x - 30 &= \left(x - \frac{3}{4}\right)(8x^3 + 36x^2 + 56x + 40) \\ &= (4x - 3)(2x^3 + 9x^2 + 14x + 10) \end{aligned}$$

Recordemos que las posibles raices negativas son

$$\left\{ -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, -\frac{3}{2}, -\frac{3}{4}, -\frac{3}{8}, -\frac{5}{2}, -\frac{5}{4}, -\frac{5}{8}, -\frac{15}{4}, -\frac{15}{8} \right\}$$

Pero de esta lista las posibles raices para $2x^3 + 9x^2 + 14x + 10$ son $-\frac{1}{2}$ y $-\frac{5}{2}$.

Veremos si $-\frac{5}{2}$ es raíz (probamos con este valor pues $-\frac{5}{2} \in (-3, -2)$ y por la tabla que hicimos en un comienzo sabemos que hay una raíz real en este intervalo)

$$\begin{array}{rrrrr} 2 & 9 & 14 & 10 & \\ -\frac{5}{2} & 2 & 4 & 4 & 0 \end{array}$$

Luego

$$2x^3 + 9x^2 + 14x + 10 = \left(x + \frac{5}{2}\right)(2x^2 + 4x + 4) = (2x + 5)(x^2 + 2x + 2)$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} p(x) = 8x^4 + 30x^3 + 28x^2 - 2x - 30 &= (4x - 3)(2x^3 + 9x^2 + 14x + 10) \\ &= (4x - 3)(2x + 5)(x^2 + 2x + 2) \\ &= (4x - 3)(2x + 5)(x + 1 - i)(x + 1 + i) \end{aligned}$$

Así las raíces son $\left\{\frac{3}{4}, -\frac{5}{2}, -1 + i, -1 - i\right\}$