

## PAUTA ENSAYO 5 : GEOMETRIA VECTORIAL

INT 116

1. Determine la ecuación del plano  $\pi$  que contiene a la recta

$\frac{2+x}{1} = y - 2 = \frac{z}{5}$  y además contiene al punto donde se intersectan

$$\text{las rectas } L_1 : \frac{3-x}{4} = y - 2 = \frac{z}{5} \text{ y } L_2 : \left. \begin{array}{l} x = -1 + t \\ y = 1 + t \\ z = -\frac{1}{5} + 2t \\ t \in \mathbb{R} \end{array} \right\}$$

$$\mathbf{R}: L_1 : \frac{3-x}{4} = y - 2 = \frac{z}{5} \Leftrightarrow \frac{x-3}{-4} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{5}$$

donde  $(-4, 1, 5)$  es el vector director de  $L_1$  y  $(3, 2, 0) \in L_1$

Ecuación vectorial de  $L_1 : (x, y, z) = (3, 2, 0) + s(-4, 1, 5), s \in \mathbb{R}$

$$\text{Ecuaciones paramétricas de } L_1 : \left. \begin{array}{l} x = 3 - 4s \\ y = 2 + s \\ z = 5s \\ s \in \mathbb{R} \end{array} \right\}$$

$$\text{Luego } L_1 \cap L_2 = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \left. \begin{array}{l} x = -1 + t \\ y = 1 + t \\ z = -\frac{1}{5} + 2t \\ t \in \mathbb{R} \end{array} \right\} \wedge \left. \begin{array}{l} x = 3 - 4s \\ y = 2 + s \\ z = 5s \\ s \in \mathbb{R} \end{array} \right\} \right\}$$

$$\text{Resolvemos : } \left. \begin{array}{l} -1 + t = 3 - 4s \\ 1 + t = 2 + s \\ -\frac{1}{5} + 2t = 5s \end{array} \right\} \text{ de donde } s = \frac{3}{5} \text{ y } t = \frac{8}{5}$$

$$L_1 \cap L_2 = \left\{ \left( \frac{3}{5}, \frac{13}{5}, 3 \right) \right\} \in \pi$$

$$\text{Por otro lado la recta } L : \frac{2+x}{1} = y - 2 = \frac{z}{5} \Leftrightarrow \frac{x+2}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{5}$$

tiene como vector director  $(1, 1, 5)$  que también es un vector

director del plano  $\pi$ . ( $L \subset \pi$ )

Para obtener el otro vector director de  $\pi$ , nos daremos un punto

cualquiera de  $L$ , por ejemplo  $Q = (-2, 2, 0)$  y  $P = \left( \frac{3}{5}, \frac{13}{5}, 3 \right) \in \pi$

$$\text{El segmento } \overrightarrow{PQ} = Q - P = (-2, 2, 0) - \left( \frac{3}{5}, \frac{13}{5}, 3 \right) = \left( -\frac{13}{5}, -\frac{3}{5}, -3 \right)$$

nos dará el otro vector director de  $\pi$

Usaremos  $(13, 3, 15)$  en vez de  $\left( -\frac{13}{5}, -\frac{3}{5}, -3 \right)$

$$\text{Vector normal de } \pi : (1, 1, 5) \times (13, 3, 15) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 5 \\ 13 & 3 & 15 \end{vmatrix} = (0, 50, -10)$$

o bien  $N = (0, 5, -1)$

Ecuación de  $\pi : 5y - z + d = 0$

Como  $(\frac{3}{5}, \frac{13}{5}, 3) \in \pi$  sus coordenadas satisfacen la ecuación

$$5 \cdot \frac{13}{5} - 3 + d = 0$$

$$d = -10$$

$$\pi : 5y - z - 10 = 0$$

**2.** Determine la ecuación vectorial de la recta que contiene al punto

$(-1, 2, 4)$  y que es paralela a los planos  $\pi_1 : x + 2y - z = 1$ ,

$$\pi_2 : -2x + y + 2z = -2$$

**R:** Sea  $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$  el vector director de la recta pedida  $L$

$L$  será paralela a los planos dados si su vector director es ortogonal a los vectores normales de dichos planos.

$$(u_1, u_2, u_3) \cdot (1, 2, -1) = 0 \wedge (u_1, u_2, u_3) \cdot (-2, 1, 2) = 0$$

$$\text{Resolvemos } \begin{cases} u_1 + 2u_2 - u_3 = 0 \\ -2u_1 + u_2 + 2u_3 = 0 \end{cases} \cdot 2$$

$$2u_1 + 4u_2 - 2u_3 = 0$$

$$-2u_1 + u_2 + 2u_3 = 0$$

sumando ambas ecuaciones obtenemos  $u_2 = 0$

reemplazando nos quedamos sólo con la ecuación

$$u_1 - u_3 = 0 \text{ parametrizamos, por ejemplo, } u_3 = t, t \in \mathbb{R}$$

el vector director de  $L$  es de la forma  $(t, 0, t)$

$$\text{Ecuación vectorial de } L : (x, y, z) = (-1, 2, 4) + t(1, 0, 1), t \in \mathbb{R}$$

**3.** Determine el área de un triángulo cuyos vértices son los

puntos  $P = (-1, 2, 4)$ ,  $Q = (3, 4, 2)$  y  $R = (2, -2, 1)$

**R:** Calculemos, por ejemplo, los segmentos  $\overrightarrow{PQ}$  y  $\overrightarrow{PR}$

$$\overrightarrow{PQ} = Q - P = (3, 4, 2) - (-1, 2, 4) = (4, 2, -2)$$

$$\overrightarrow{PR} = R - P = (2, -2, 1) - (-1, 2, 4) = (3, -4, -3)$$

$$\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & 2 & -2 \\ 3 & -4 & -3 \end{vmatrix} = (-14, 6, -22)$$

$$\|\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}\| = \sqrt{(-14, 6, -22) \cdot (-14, 6, -22)} = \sqrt{716}$$

$$\text{Area del triángulo} = \frac{\sqrt{716}}{2}$$

4. Sean  $P = (a, -a, 2a) \in \mathbb{R}^3$  y  $\pi$  el plano que contiene a los puntos  $(1, 1, 3)$ ,  $(0, 1, 2)$  y  $(0, 0, 1)$ .

$$\text{Hallar } P \text{ tal que } d(P, \pi) = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

**R:** Sea  $ax + by + cz + d = 0$  la ecuación de  $\pi$

$$\text{Como } (1, 1, 3) \in \pi, a \cdot 1 + b \cdot 1 + c \cdot 3 + d = 0$$

$$\text{Como } (0, 1, 2) \in \pi, a \cdot 0 + b \cdot 1 + c \cdot 2 + d = 0$$

$$\text{Como } (0, 0, 1) \in \pi, a \cdot 0 + b \cdot 0 + c \cdot 1 + d = 0$$

$$\text{Resolvemos } \left. \begin{array}{l} a + b + 3c + d = 0 \\ b + 2c + d = 0 \\ c + d = 0 \end{array} \right\}$$

$$\text{Obteniendo } c = -d, b = d, a = d$$

$$\text{Si, por ejemplo, } d = 1$$

$$\text{obtenemos que la ecuación de } \pi \text{ es } x + y - z + 1 = 0$$

$$\text{cuyo vector normal es } N = (1, 1, -1)$$

Consideremos el punto  $Q = (0, 0, 1) \in \pi$  y determinemos

$$\text{el segmento dirigido } \overrightarrow{QP} = P - Q = (a, -a, 2a) - (0, 0, 1) = (a, -a, 2a - 1)$$

Luego

$$d(P, \pi) = \frac{|(a, -a, 2a - 1) \cdot (1, 1, -1)|}{\|(1, 1, -1)\|} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\frac{|-2a + 1|}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$|-2a + 1| = 1$$

$$-2a + 1 = 1 \vee -2a + 1 = -1$$

$$a = 0 \vee a = 1$$

Así tenemos dos puntos que satisfacen las condiciones dadas

en el enunciado, a saber,  $P_1 = (0, 0, 0)$  y  $P_2 = (1, -1, 2)$