

PAUTA CONTROL 14

1. Considere los planos $\Pi_1 : 2x + 2y - 3z = 6$ y $\Pi_2 : 2x + by - z = 1$. Determine si es posible el valor de $b \in \mathbb{R}$ tal que:

a. $\Pi_1 \perp \Pi_2$.

b. $\Pi_1 \parallel \Pi_2$.

c. la recta que pasa por $A(2, 0, 3)$ y por $B(0, 2, 1)$ este contenida en el plano Π_2 .

Desarrollo

a. Para que dos planos sean perpendiculares, sus vectores normales deben ser perpendiculares. Si los vectores normales correspondientes a los planos Π_1 y Π_2 son $n_1 = (2, 2, -3)$ y $n_2 = (2, b, -1)$ respectivamente, se debe cumplir que

$$(2, 2, -3) \cdot (2, b, -1) = 0$$

$$7 + 2b = 0$$

$$b = -\frac{7}{2}$$

$$\text{Luego } \Pi_1 \perp \Pi_2 \text{ si } b = -\frac{7}{2}$$

b. Para que dos planos sean paralelos, sus vectores normales deben ser paralelos, esto significa que uno de ellos es combinación lineal del otro.

$$(2, b, -1) = \lambda(2, 2, -3)$$

$$2\lambda = 2 \Rightarrow \lambda = 1$$

$$2\lambda = b$$

$$-3\lambda = -1 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{3}$$

Así por un lado $\lambda = 1$ y por el otro $\lambda = \frac{1}{3}$, por lo tanto no existe λ tal que $n_2 = \lambda n_1$.

Entonces sea cual sea el valor de b los vectores n_1 y n_2 nunca van a ser paralelos.

Luego no existe $b \in \mathbb{R}$ tal que $\Pi_1 \parallel \Pi_2$.

c. Para que la recta que pasa por A y B este contenida en el plano Π_2 primero debe contener a dichos puntos

Note que sin importar cuanto vale b , A siempre esta en Π_2 .

Para que B este en el plano

$$2(0) + b(2) - 1(1) = 1$$

$$2b = 2$$

$$b = 1$$

Así para que la recta que pasa por A y B este contenida en el plano Π_2 basta que $b = 1$.

2. Calcule el área del paralelogramo formado por los vectores \vec{h}, \vec{k} donde \vec{h} es un vector de módulo 9, perpendicular a los vectores $(0, -1, 2)$ y $(1, 1, 0)$ y \vec{k} es un vector que va desde el punto $\left(-1, 2, -\frac{5}{3}\right)$ a $\left(-1, 2, \frac{1}{3}\right)$.

Desarrollo

Como \vec{h} debe ser perpendicular a ciertos vectores, calculemos primero

$$\vec{a} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -2i + 2j + k$$

$$\vec{a} = (-2, 2, 1)$$

a es un vector perpendicular a $(0, -1, 2)$ y $(1, 1, 0)$ pero no tiene modulo 9. Como lo arreglamos

$$\text{Luego } \vec{h} = \frac{9}{\|\vec{a}\|} \vec{a}$$

Note que al multiplicar \vec{a} por $\frac{1}{\|\vec{a}\|}$, lo normalizamos, es decir su norma o modulo es 1, y al

multiplicar por 9 y calcular el modulo me queda 9. Note que sigue siendo perpendicular a los vectores anteriores, pues los escalares salen al hacer el producto punto.

$$\text{Asi } \vec{h} = \frac{9}{\|\vec{a}\|} \vec{a} = \frac{9}{3}(-2, 2, 1) = (-6, 6, 3)$$

$$\vec{k} = \left(-1, 2, \frac{1}{3}\right) - \left(-1, 2, -\frac{5}{3}\right) = (0, 0, 2)$$

Ahora recordemos que $\|\vec{h} \times \vec{k}\|$ es el área del paralelogramo formado por los vectores \vec{h} y \vec{k}

$$\vec{h} \times \vec{k} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -6 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 12i + 12j$$

$$\|\vec{h} \times \vec{k}\| = \|(12, 12, 0)\| = 12\sqrt{2} \approx 16.971$$

3. Dados los puntos $A(-1, 0, 1), B(-1, 3, -1), C(2, 0, -1)$ calcular

a. El volumen del paralelepipedo que generan los vectores $\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}$.

b. La medida del ángulo $\triangle ABC$

Desarrollo

a. Es claro que $\vec{OA} = (-1, 0, 1), \vec{OB} = (-1, 3, -1), \vec{OC} = (2, 0, -1)$

Recordemos que el volumen de un paralelepipedo formado por los vectores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ es $|(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}|$

$$\vec{OA} \times \vec{OB} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -3i - 2j - 3k$$

$$\vec{OA} \times \vec{OB} = (-3, -2, -3)$$

$$|(\vec{OA} \times \vec{OB}) \cdot \vec{OC}| = |(-3, -2, -3) \cdot (2, 0, -1)| = 3$$

b. Para calcular la medida del ángulo $\triangle ABC$, debemos calcular los vectores que lo forman

$$\vec{AB} = (0, 3, -2)$$

$$\vec{CB} = (3, -3, 0)$$

$$\cos(\triangle ABC) = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{CB}}{\|\vec{AB}\| \|\vec{CB}\|} = \frac{-9}{\sqrt{13} \sqrt{18}} = -\frac{3}{26} \sqrt{26}$$

$$\triangle ABC \approx 126.03^\circ$$