

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE VALPARAISO
INSTITUTO DE MATEMATICA

(Viernes 29 de Abril)

OBSERVACIONES :

- 1.-Dispone de 90 minutos para contestar.
- 2.-No se permite el uso de calculadora.
- 3.-No se aceptan consultas.
- 4.-Cada pregunta tiene 12 puntos.

PAUTA

SEGUNDO CERTAMEN MAT 116

PREGUNTA 1 :

Determine la(s) solución(es) de

$$\sin^3 x + \sin x = \sin^2 2x$$

en el intervalo $[0, 2\pi]$

RESPUESTA :

$$2 \sin \frac{3x+x}{2} \cos \frac{3x-x}{2} = \sin^2 2x$$

$$2 \sin 2x \cos x + \sin 2x = 0$$

$$\sin 2x (2 \cos x + 1) = 0$$

$$\sin 2x = 0 \cup \cos x = -\frac{1}{2}$$

$$x = \frac{k\pi}{2}, x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$$

Soluciones en el intervalo $[0, 2\pi]$

$$\left\{ \frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2} \right\}$$

PREGUNTA 2 :

Determine la amplitud, período y diferencia de fase de la siguiente senoide :

$$y = \sin^2 2x + \frac{3\pi}{4} + \sqrt{3} \cos^2 2x + \frac{3\pi}{4}$$

RESPUESTA :

$$y = 2 \left(\frac{1}{2} \sin^2 2x + \frac{3\pi}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos^2 2x + \frac{3\pi}{4} \right)$$

$$y = 2 \left(\sin^2 2x + \frac{3\pi}{4} + \sqrt{3} \cos^2 2x + \frac{3\pi}{4} \right)$$

$$y = 2 \sin \left(2x + \frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{3} \right)$$

$$y = 2 \sin \left(2x + \frac{13\pi}{12} \right)$$

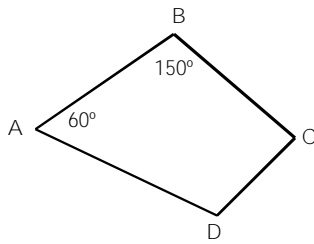
$$\text{Amplitud} = 2$$

$$\text{Período} = \pi$$

$$\text{Diferencia de fase} = \frac{13\pi}{24}$$

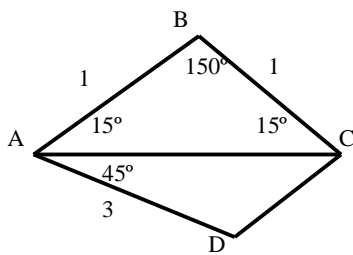
PREGUNTA 3 :

Determine el perímetro exacto del polígono ABCD



donde $\overline{AD} = 3 \text{ m}$, $\overline{AB} = \overline{BC}$ y $\angle C = \frac{1}{3} \angle A$

RESPUESTA :



Como $\triangle ABC$ isósceles, $\angle CAB = \angle BCA = 20^\circ$

$$\overline{AC}^2 = 1^2 + 1^2 - 2 \cos 150^\circ$$

$$\overline{AC}^2 = 2 + 2\sqrt{3}$$

$$\overline{AC} = \sqrt{2 + 2\sqrt{3}}$$

$$\overline{DC}^2 = 9 + 2 + 2\sqrt{3} - 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{2 + 2\sqrt{3}} \cdot \cos 40^\circ$$

$$\overline{DC}^2 = 11 + 2\sqrt{3} - 6\sqrt{2 + 2\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\overline{DC} = \sqrt{11 + 2\sqrt{3} - 3\sqrt{4 + 4\sqrt{3}}}$$

$$\text{Perímetro del polígono } ABCD = 5 + \sqrt{11 + 2\sqrt{3} - 3\sqrt{4 + 4\sqrt{3}}} \text{ m}$$

PREGUNTA 4 :

Determine todos los valores de z que satisfacen la siguiente ecuación compleja :

$$\frac{1}{z^3} = \frac{(\sqrt{3} - i)^6}{(\sqrt{2} - \sqrt{2}i)^4}$$

RESPUESTA :

$$z^3 = \frac{(\sqrt{2} - \sqrt{2}i)^4}{(\sqrt{3} - i)^6}$$

$$z^3 = \frac{\sqrt{2} \text{cis} \frac{7\pi}{4}}{\sqrt{2} \text{cis} \frac{7\pi}{6}}$$

$$z^3 = \frac{16 \text{cis} \frac{7\pi}{4}}{64 \text{cis} \frac{7\pi}{6}}$$

$$z^3 = \frac{1}{4} \text{cis} 0$$

Las soluciones son :

$$S = \left\{ \sqrt[3]{\frac{1}{4}} \text{cis} 0, \sqrt[3]{\frac{1}{4}} \text{cis} \frac{2\pi}{3}, \sqrt[3]{\frac{1}{4}} \text{cis} \frac{4\pi}{3} \right\}$$

PREGUNTA 5 :

Describa el lugar geométrico de los complejos que satisfacen la siguiente igualdad en z :

$$z + \bar{z} = |z|^2$$

RESPUESTA :

$$\text{Sea } L.G. = \{x + yi \mid x + yi + x - yi = x^2 + y^2\}$$

$$L.G. = \{x + yi \mid 2x = x^2 + y^2\}$$

$$L.G. = \{x + yi \mid x^2 - 2x + y^2 = 0\}$$

$$L.G. = \{x + yi \mid x^2 - 2x + 1 + y^2 = 1\}$$

$$L.G. = \{x + yi \mid (x-1)^2 + y^2 = 1\}$$

El lugar geométrico es una circunferencia centrada en $(1, 0)$ de radio 1