

Polinomios.

1. Hallar la relación entre a y b para que $f(x) = 2x^4 - 7x^3 + ax + b$ sea divisible por $(x - 3)$

Sol. Utilice $R = f(3) = 0$

2. Demostrar que $f(x) = 32x^{10} - 33x^5 + 1$ es divisible por $(x - 1)$

Sol. Utilice $0 = f(1)$

3. Qué número debe agregarse a $x^3 + 2x^2$ para que sea divisible por $(x + 4)$

Sol. debe agregarse el número 32

4. Efectuar la división de $4x^5 - 3x^4 - 5x^3 + 2$ por $(x + 1)$

Sol. $4x^4 - 7x^3 + 2x^2 - 2x + 2$

5. Hallar k de modo que el polinomio $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4kx - 2$ tenga una raíz $x = 2$

Sol. $k = -\frac{1}{4}$

6. Resolver la ecuación sabiendo que 5 es una raíz de la ecuación: $x^3 + 2x^2 - 23x - 60 = 0$

Sol. $x_1 = 5$; $x_2 = -3$; $x_3 = -4$

7. Para que valores de k es $x^2 + 3x + k$ divisible por k

Sol. $k_1 = 0$; $k_2 = -4$

8. Resolver la ecuación $4x^3 - 24x^2 + 23x + 18 = 0$ sabiendo que sus raíces están en P.A.

Sol. $-\frac{1}{2}$; 2 ; $\frac{9}{2}$

9. Resuelva la ecuación $3x^3 - 26x^2 + 52x - 24 = 0$, si las raíces están en P.G.

10. Resuelva la ecuación $x^4 - 16x^3 + 86x^2 - 176x + 105 = 0$ si dos de sus raíces son 1 y 7

Sol. Las raíces son 1, 3, 5 y 7

11. Resolver $4x^3 + 20x^2 - 23x + 6 = 0$ si dos de las raíces son iguales

Sol. $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}$ y -6

12. Resolver $6x^4 - 29x^3 + 40x^2 - 7x - 12 = 0$, si el producto de dos de ellas es 2

Sol. : $\frac{4}{3}$; $\frac{3}{2}$; $1 + \sqrt{2}$; $1 - \sqrt{2}$

13. Determinar el parámetro k en la ecuación $x^3 - 7x + k = 0$ de modo que una de sus raíces sea el doble de la otra

$$\text{Sol : } -3, 1, 2, 3, -1, -2$$

14. En los siguientes problemas, halle todas las raíces reales del polinomio dado

a. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$

b. $f(x) = 4x^3 + 5x^2 - 8x - 10$

c. $f(x) = 16x^4 - 8x^2 + 1$

d. $f(x) = 8x^3 + 5x^2 - 11x + 3$

e. $f(x) = 10x^4 - 33x^3 + 66x - 40$

f. $f(x) = x^5 + 4x^4 - 6x^3 - 24x^2 + 5x + 20$

g. $f(x) = 6x^4 + 11x^3 - 3x^2 - 2x$

h. $f(x) = 0.9x^3 + 4.2x^2 - 3.5x - 10$

Sol.(a) : $-1; 2$ (multiplicidad 2)

(b) : $-\frac{5}{4}; -\sqrt{2}; \sqrt{2}$

(c) : $-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}$ (cada una multiplicidad 2)

(d) : $\frac{3}{8}; \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}; \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$

(e) : $\frac{4}{5}; \frac{5}{2}; -\sqrt{2}; \sqrt{2}$

(f) : $-4; -1; 1; -\sqrt{5}; \sqrt{5}$

(g) : $-2; 0; -\frac{1}{3}; \frac{1}{2}$

(h) : $-5; -\frac{4}{3}; \frac{5}{3}$

15. Utilice la división sintética para dividir $f(x)$ por $g(x)$. Identifique el cociente $q(x)$ y el residuo r .

a. $f(x) = x^5 + 56x^2 - 4; g(x) = x + 4$

b. $f(x) = x^3 - (2 + \sqrt{3})x^2 + 3\sqrt{3}x - 3; g(x) = x - \sqrt{3}$

Sol. (a) : $q(x) = x^4 - 4x^3 + 16x^2 - 8x + 32; r = -132$

(b) : $q(x) = x^2 - 2x + \sqrt{3}; r = 0$

16. Utilice la división larga para hallar un valor de k tal que sea divisible por $g(x)$ si $f(x) = x^4 + x^3 + 3x^2 + kx - 4$ y $g(x) = x^2 - 1$

Sol. $k = -1$

17. Halle todas las raíces racionales de los siguientes polinomios

a. $f(x) = 5x^3 - 3x^2 + 8x + 4$

b. $f(x) = x^3 - 8x - 3$

c. $f(x) = x^4 + 2x^3 + 10x^2 + 14x + 21$

d. $f(x) = 6x^4 - 5x^3 - 2x^2 - 8x + 3$

e. $f(x) = x^4 + 6x^3 - 7x$

f. $f(x) = x^5 + x^4 - 5x^3 + x^2 - 6x$

g. $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{9}{4}x^2 + \frac{17}{4}x - 3$

h. $f(x) = 2.5x + x^2 + 0.6x + 0.1$

Sol. (a) : $-\frac{2}{5}$

(b) : 3

(c) : *Ninguno*

(d) : $-\frac{1}{3}; \frac{3}{2}$

(e) : 0; 1

(f) : -3; 0; 2

(g) : $\frac{3}{2}$

(h) : $-\frac{1}{5}$

18. En los siguientes problemas, utilice la división larga para dividir $f(x)$ por $g(x)$. Escriba las respuestas en la forma $f(x) = g(x)q(x) + r(x)$

a. $f(x) = x^2 + 4x - 7$; $g(x) = x + 8$

b. $f(x) = 5x^3 - 7x^2 + 4x + 1$; $g(x) = x^2 + x - 1$

c. $f(x) = 2x^3 + 4x^2 - 3x + 5$; $g(x) = (x - 2)^2$

d. $f(x) = 6x^5 + 4x^4 + x^3$; $g(x) = x - \frac{1}{3}$

Sol. :

(a) : $(x + 8)(x - 4) + 25$

(b) : $(x^2 + x - 1)(5x - 12) + 21x - 11$

(c) : $(x - 2)^2(2x + 12) + 37x - 43$

(d) : $\left(x - \frac{1}{3}\right)\left(6x^4 + 6x^3 + 3x^2 + x + \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{9}$

19. Halle las cotas superior e inferior para las raíces reales del polinomio dado

a. $f(x) = 7x^3 - 4x^2 - 2x + 1$

b. $f(x) = x^3 - x^2 + 3x - 7$

c. $f(x) = x^4 - 5x^2 - 13$

d. $f(x) = 2x^4 - 11x^3 + 2x^2 - 13x + 11$

e. $f(x) = 3x^5 + 2x^2 + 5x - 17$

Sol. (a) : $[-1, 1]$

(b) : $[1, 2]$

(c) : $[-3, 3]$

(d) : $[0, 6]$

(e) : $[-1, 2]$

20. En los siguientes problemas, utilice la regla de los signos de Descartes para determinar los posibles números de las raíces positivas y negativas del polinomio dado

a. $f(x) = 8x^2 + 2x - 3$

b. $f(x) = 7x^3 - 6x^2 + x - 5$

c. $f(x) = x^3 + 4x^2 + 6x + 1$

- d. $f(x) = -x^4 + 8x^3 - 5x - 9$
 e. $f(x) = x^5 + x^4 + x^3 - x^2 - x + 1$

Sol. :

- (a) : Una positiva, una negativa
 (b) : 3 raíces positivas o una positiva; ninguna negativa
 (c) : Ninguna positiva, Tres o una negativa
 (d) : Dos ceros positivos o ninguno; dos ceros negativos o ninguno una negativo
 (e) : Dos positivas o ninguna positiva, Tres o ninguna negativa

21. Utilice división sintética para hallar un valor de k tal que $f(x) = kx^4 + 2x^2 + 9k$ y $g(x) = x - 1$

$$\text{Sol. } k = -\frac{1}{5}$$

22. Halle todas las soluciones racionales de la ecuación dada

- a. $2x^3 + 3x^2 + 5x + 2 = 0$
 b. $2x^4 + 7x^3 - 8x^2 - 25x - 6 = 0$
 c. $x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 0$

$$\text{Sol. (a) : } -\frac{1}{2}$$

$$(b) : -\frac{3}{2}; 2$$

$$(c) : -1$$

23. Calcule las constantes A y B de modo que:

$$\frac{1}{(x+1)(x-2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2}$$

$$\text{Sol : } A = -\frac{1}{3} \text{ y } B = \frac{1}{3}$$

24. Calcule las constantes A y B tales que:

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2}$$

$$\text{Sol : } A = -1 \text{ y } B = 1.$$

25. En los siguientes casos descomponga la fracción dada como un polinomio más una descomposición en suma de fracciones parciales en $\mathbb{R}[x]$.

- a. $\frac{x^2 + x + 1}{x^3 - x^2 - 2x}$
 b. $\frac{x^2 + x + 1}{(x-1)(x+1)^3}$

- c. $\frac{2x^2 + x}{x^3 - 1}$
d. $\frac{2x^4 - 2x^3 + 3x^4}{x^3 - 1} :$
e. $\frac{2x^4 - 2x^3 + 8x^2 - 5x + 6}{(x - 1)(x^2 + 2)^2}$
f. $\frac{1 + 2x^2 + 3x^4}{x(1 + x^2)^2}$

$$\text{Sol. (a) : } -\frac{1}{2x} + \frac{1}{3(x+1)} + \frac{7}{6(x-2)}$$

$$(b) : \frac{3}{8(x-1)} - \frac{1}{2(x+1)^3} + \frac{1}{4(x+1)^2} - \frac{3}{8(x+1)}$$

$$(c) : \frac{1}{x-1} + \frac{x+1}{x^2+x+1}$$

$$(d) : 5x - 2 + \frac{1}{x-1} - \frac{x-3}{x^2+x+1}$$

$$(e) : \frac{1}{x-1} + \frac{x-1}{x^2+2} + \frac{x}{(x^2+2)^2}$$

$$(f) : \frac{1}{x} + 2\frac{x}{x^2+1} - 2\frac{x}{(x^2+1)^2}$$

26. Descomponga $p(x)$ en suma de fracciones parciales en $\mathbb{C}[x]$, donde

$$p(x) = \frac{x^2 + x}{x^4 - 4x^3 + 7x^2 - 6x + 2}.$$

$$\text{Sol. : } \frac{3}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2} + \frac{-3+i}{2(x-1+i)}$$