

Números Complejos

1. Verifique las siguientes igualdades:

a. $\overline{\bar{z} - 3i} = z - 3i$

b. $\overline{i\bar{z}} = i\bar{z}$

c. $\overline{\bar{z}} = z$

2. Sea $z, w \in \mathbb{C}$ con $z = e^{-i}$, $w = \sqrt{2}i - \sqrt{6}$. Determine

a. $\left(\frac{z-w}{i}\right)^2$

Sol : $8cis\left(\frac{7}{6}\right)$

b. $\operatorname{Re}\left(\frac{i-3}{w}\right)$

Sol : $\frac{3\sqrt{6} - \sqrt{2}}{8}$

c. $\operatorname{Im}\left(e^{-i}(\sqrt{2}i - \sqrt{6})\right)$

Sol : $\frac{1}{\sqrt{2}}$

3. Resuelva en \mathbb{C} la siguiente ecuación cuadrática

$$z^2 - e - 2iz - 5 - i = 0$$

Sol :

$z_1 : 2 - y$

$z_2 : 3 - y$

4. Grafique el conjunto solución en \mathbb{R}^2 de todos los $z = x + iy \in \mathbb{C}$ tal que :

$$\frac{z-2-i}{z-i} = 1$$

$$L : \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 / y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{4} \right\}$$

5. Determine todos los $z \in \mathbb{C}$ tal que :

$$z^3 - i - 1 = 4 \frac{(\sqrt{3} - i)^6}{1 - \sqrt{3}i}$$

Sol :

$$z_0 : 2Cis\left(\frac{0}{9}\right)$$

$$z_1 : 2Cis\left(\frac{7}{9}\right)$$

$$z_2 : 2Cis\left(\frac{13}{9}\right)$$

6. Resuelva en \mathbb{C} la ecuación $i^3 z^5 - 1 - i^6 = 0$

$$z_0 = \sqrt[5]{8} Cis\ 0$$

$$z_1 = \sqrt[5]{8} Cis\left(\frac{2}{5}\right)$$

$$z_2 = \sqrt[5]{8} Cis\left(\frac{4}{5}\right)$$

$$z_3 = \sqrt[5]{8} Cis\left(\frac{6}{5}\right)$$

$$z_4 = \sqrt[5]{8} Cis\left(\frac{8}{5}\right)$$

7. Halle y haga la grafica de todas las soluciones de $z^3 = e^{i\frac{\pi}{2} - 1}$. Considere $e^i = \cos + i \sin$

$$k = 0; w_0 = \left(\sqrt{2}\right)^{\frac{1}{3}} \left\{ \cos \frac{3}{12} + i \sin \frac{3}{12} \right\}$$

$$k = 1; w_1 = \left(\sqrt{2}\right)^{\frac{1}{3}} \left\{ \cos \frac{11}{12} + i \sin \frac{11}{12} \right\}$$

$$k = 2; w_2 = \left(\sqrt{2}\right)^{\frac{1}{3}} \left\{ \cos \frac{19}{12} + i \sin \frac{19}{12} \right\}$$

8. Calcule $\left\| \left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \right)^{12} - \frac{2-3i}{1-i} \right\|$

$$Sol : \sqrt{\frac{13}{2}}$$

9. Calcule la parte real e imaginaria de: $z = (1 - \sqrt{3}i)^6 - (1 + \sqrt{3}i)^6$

$$Sol : 2^7$$

10. Represente $w = 8 - 8\sqrt{3}i$ y calcule los z tal que $z^4 = 8 - 8\sqrt{3}i = 0$

$$\begin{aligned} z_0 &= \sqrt[4]{16} \operatorname{Cis}\left(\frac{2}{12}\right) \\ z_1 &= \sqrt[4]{16} \operatorname{Cis}\left(\frac{8}{12}\right) \\ z_2 &= \sqrt[4]{16} \operatorname{Cis}\left(\frac{14}{12}\right) \\ z_3 &= \sqrt[4]{16} \operatorname{Cis}\left(\frac{20}{12}\right) \end{aligned}$$

-
11. Calcule $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{1/z}\right)$ e identifique el conjunto: $C = \{z : \operatorname{Re}\left(\frac{1}{1/z}\right) = 0\}$ donde $z = x + iy$

Sol:

$$\operatorname{Re}\left(\frac{1}{1/z}\right) = \frac{1}{1 - \frac{x^2}{y^2}} \text{ y el conjunto } C \text{ es una circunferencia de centro } (0,0) \text{ y radio } 1$$

-
12. Determine todos los $z \in \mathbb{C}$ tales que

$$z^3 + i = 1 + 4 \frac{(\sqrt{3} - i)^6}{1 - \sqrt{3}i}$$

Sol :

$$\begin{aligned} k = 0 \quad z_1 &= 2\operatorname{Cis}\left(\frac{\pi}{9}\right) \\ k = 1 \quad z_2 &= 2\operatorname{Cis}\left(\frac{7\pi}{9}\right) \\ k = 2 \quad z_3 &= 2\operatorname{Cis}\left(\frac{13\pi}{9}\right) \end{aligned}$$

-
13. Calcule el valor de la siguiente expresión

$$\left| \left(\operatorname{Cis}\left(\frac{\pi}{6}\right) \right)^{12} - \frac{2 - 3i}{1 - i} \right|$$

$$\text{Sol : } \sqrt{\frac{26}{2}}$$

-
14. Resuelva las siguientes ecuaciones en \mathbb{C} :

a. $\frac{e^{-3i}}{2 - 2\sqrt{3}i} = \left(\frac{\operatorname{Cis}\left(\frac{3}{2}\right) - \operatorname{Cis}\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\bar{z}} \right)^4$

Sol :

$$\bar{z}_1 = 2\text{Cis}\left(\frac{23}{12}\right)$$

$$\bar{z}_2 = 2\text{Cis}\left(\frac{17}{12}\right)$$

$$\bar{z}_3 = 2\text{Cis}\left(\frac{11}{12}\right)$$

$$\bar{z}_4 = 2\text{Cis}\left(\frac{5}{12}\right)$$

b. $\frac{\sqrt{3}}{5i} - \frac{\sqrt{3}i}{14} = \text{Im } z - \text{Re } \bar{z}$

Sol : $z = \frac{19\sqrt{3}}{221} - \frac{9\sqrt{3}}{221}i$

c. $z = \left(\frac{2 - 3i - \overline{5 - i^2}}{i^6} \right)^2$

Sol : $3380 - 8112i$

15. Sea $z \in \mathbb{C}$, $a, b \in \mathbb{R}$. Determine si son verdaderas o falsas cada una de las siguientes afirmaciones. Justifique adecuadamente su respuesta.

a. $i^n = i^{n-1} = i^{n-2} = i^{n-3} = i^{4n-6}$

Sol : falso $i^n = i^{n-1} = i^{n-2} = i^{n-3} = i^{n-1} = i = 1 = i = 0$

b. $z = \bar{z} = |\bar{z}|^2$

Sol : Verdadero

$$z = \bar{z} = a - bi = a + bi = a^2 + b^2 = \left(\sqrt{a^2 + b^2} \right) = |\bar{z}|^2$$

16. Obtenga $|A|$ donde $A = \left(\text{Cis} \frac{2}{5} \right)^{10} \frac{2 - 3i}{1 - i}$

Sol : $|A| = 2,5$

17. Sean $z, w \in \mathbb{C}$, con $z = e^{-4i}$, $w = \sqrt{2}i - \sqrt{6}$. Determine:

a. $\left(\frac{z - w}{i} \right)^2$

b. $\text{Re} \left(\frac{i - 3}{w} \right)$

c. $\overline{\text{Im } z - w}$

Sol :

$$\begin{aligned} a &= 8 \operatorname{Cis}\left(\frac{7}{6}\right) \\ b &= \frac{(3\sqrt{6} - \sqrt{2})}{8} \\ c &= \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

18. Resuelva las siguientes ecuaciones en \mathbb{C} :

a. $\frac{i^{42} i}{\operatorname{Cis}\left(\frac{3}{2}\right)} = \operatorname{Im} \bar{z} - \operatorname{Re} z + i$

Sol : $z = 1 - i + \sqrt{2} \operatorname{Cis}\left(\frac{5}{4}\right)$

b. $\left(\frac{2e^{1.5i}}{\bar{z}}\right)^4 = 2i - 5$

Sol :

$$\begin{aligned} \bar{z}_0 &= \frac{4}{\sqrt[4]{29}} \operatorname{Cis} 0.54 & z_0 &= \frac{4}{\sqrt[4]{29}} \operatorname{Cis} 5.74 \\ \bar{z}_1 &= \frac{4}{\sqrt[4]{29}} \operatorname{Cis} 2.11 & z_1 &= \frac{4}{\sqrt[4]{29}} \operatorname{Cis} 4.17 \\ \bar{z}_2 &= \frac{4}{\sqrt[4]{29}} \operatorname{Cis} 3.68 & z_2 &= \frac{4}{\sqrt[4]{29}} \operatorname{Cis} 2.6 \\ \bar{z}_3 &= \frac{4}{\sqrt[4]{29}} \operatorname{Cis} 5.25 & z_3 &= \frac{4}{\sqrt[4]{29}} \operatorname{Cis} 1.03 \end{aligned}$$

19. Determine si son verdaderas o falsas cada una de las siguientes afirmaciones. Justificando adecuadamente su respuesta.

a. En \mathbb{C} , $x = \sqrt[3]{8} - x = 2$

Sol : Falso

pues

$$x = \sqrt[3]{8} = x_0 = 2 \operatorname{Cis}\left(\frac{0}{3}\right); x_1 = 2 \operatorname{Cis}\left(\frac{2\pi}{3}\right); x_2 = 2 \operatorname{Cis}\left(\frac{4\pi}{3}\right)$$

b. Si $z, w \in \mathbb{C}$, donde

$$z = r \operatorname{Cis} \theta, w = s \operatorname{Cis} \phi \quad z + w = r + s \operatorname{Cis} \theta$$

Sol : Falso

basta tomar

$$\begin{aligned} z &= 1\text{Cis } 1 \\ w &= 1\text{Cis } 0 \\ z \cdot w &= 2\text{Cis } 2 \end{aligned}$$

c. Sea $z \in \mathbb{C}$, con $z = r\text{Cis } \theta$, entonces $\frac{1}{\bar{z}} = r^{-1}\text{Cis } \theta$

Sol : Verdadero

$$\begin{aligned} \bar{z} &= r\text{Cis } -\theta \\ \frac{1}{\bar{z}} &= \frac{1\text{Cis } 0}{r\text{Cis } -\theta} = r^{-1}\text{Cis } \theta \end{aligned}$$
