

# Guía preparación control 6

## Tema: Números Complejos

1. Verifique que  $\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$  satisface

$$\frac{3}{z+1} - \frac{1}{z} = 1$$

2. Pruebe si  $\frac{1}{z} + z$  es un número real entonces

$$\operatorname{Im}(z) = 0 \quad \vee \quad |z| = 1$$

3. Calcular  $(-1 + i)^{24}$

4. Determinar  $z$  tal que

$$z \cdot \bar{z} + 3(z - \bar{z}) = 4 - 3i$$

5. Encontrar  $\operatorname{Re}(z)$  de  $\frac{1}{z^2}$  donde  $z = a + bi$

6. Hallar los complejos  $z$  que satisfacen las 2 relaciones siguientes

$$\left| \frac{z-12}{z-8i} \right| = \frac{5}{3} \quad \wedge \quad \left| \frac{z-4}{z-8} \right| = 1$$

7. La suma de 2 números complejos es  $3 + 2i$ , la parte real de uno de ellos es 2. El cociente entre ambos es un imaginario puro. Hallar los complejos.

8. Dados  $z_1 = 1 + 3i$  y  $z_2 = 2 - i$ , hallar un número complejo  $w$  tal que

a.  $|w| = |z_1| + |z_2|$

b.  $\arg(w) = \frac{\arg(z_1) + \arg(z_2)}{2}$

9. Dados los complejos  $v = (1, 1)$ ;  $w = (1, -2)$ , calcule  $z$  tal que  $z^{-1} - v + \bar{w} = 0$

10. Considere los complejos  $Z_1 = 1 + \sqrt{3}i$   $Z_2 = 2\sqrt{3} + 2i$ , Encontrar:

a.  $\operatorname{Re}(Z_1^{30} Z_2^{12})$

b.  $\left( \overline{(Z_1 Z_2)^{35}} \right)$

11. Una raíz cúbica de un número complejo es  $1 + i$ . Encuentre dicho número complejo y sus otras dos raíces cúbicas.

12. Grafique en el plano complejo  $\mathbb{C}$  el conjunto

$$S = \left\{ z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\left(\frac{1+z}{1-z}\right) = 0 \right\}$$

13. Halle y haga la gráfica de todas las soluciones de

$$z^3 = e^{\frac{i\pi}{2}} - 1$$

14. Demuestre que la hipérbola  $x^2 - y^2 = 1$  se puede escribir como  $\left\{ w \in \mathbb{C} : |w|^2 = 1 + \frac{1}{2}|w - \bar{w}| \right\}$ .

15. Calcule  $\left\| \left( \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \right)^{12} + \frac{2+3i}{1+i} \right\|$

16. Determine todos los  $z \in \mathbb{C}$  tales que

$$z^3(i-4)^4 = \frac{(-\sqrt[3]{3} + i)^6}{1 - \sqrt[3]{3}}$$

**17.** Determine el lugar geométrico de un complejo  $z$  que verifica la ecuación

$$|(1+i)z - (1+3i)| < 1$$

**18.** Si

$$\frac{w+z}{w-z} = 1 + 4i$$

Encuentre  $\frac{w}{z}$

**19.** Calcular el complejo en forma binaria, en donde  $z$  es

$$z = \frac{(-4 - 4\sqrt{3}i)(6\cos(220^\circ) + i\sin(220^\circ))}{3(\cos(40^\circ) + i\sin(40^\circ))}$$

**20.** Resuelva en  $\mathbb{C}$  la ecuación

$$i^3 z^5 - (1+i)^6 = 0$$