

Control 8

08/10/04

1. Encuentre la fórmulas para $\sum_{k=1}^n ka^k$
(justifique bien su respuesta))

RESPUESTA 1

ejercicio numero uno

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n ka^k &= a^{n+1} \frac{(n+1)a - n - 1 - a}{(a-1)^2} + \frac{a}{(a-1)^2} : \frac{a^{n+1}an - a^{n+1}n - a^{n+1} + a}{(a-1)^2} = \\ &= \frac{1}{(a-1)^2} a^n a^2 n - \frac{1}{(a-1)^2} a^n an - \frac{1}{(a-1)^2} a^n a + \frac{a}{(a-1)^2} \\ \sum_{k=1}^n ka^k &= 1a^1 + 2a^2 + 3a^3 + + na^n \\ &= a + a^2 + a^3 + + a^n + a^2 + 2a^3 + (n-1)a^n \\ &= \sum_{h=1}^n a^k + a_2 + a_3 + + a^n + a^3 + 2a^4 + 3a^5 (n-2)a^n \\ &= \sum_{h=1}^n a^k + \sum_{k=2}^n a^k + a^3 + a^4 + a^5 + + a^n + a^2 + 2a^5 + (n-3)a^n \\ &= \sum_{k=1}^n a^k + \sum_{k=2}^n a^k + \sum_{k=3}^n a^k + \sum_{k=4}^n a^k + + \sum_{k=n}^n a^k \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{k=i}^n a^k \end{aligned}$$

y ahi sabes cual es la primera una pg

y pa la segunda

$$\begin{aligned} \sum_{k=i}^n a^k &= a^i + a^{i+1} + + a^n = a^i(1 + a + + a^{n-i}) = a^i \left(\frac{1 - a^{n-i+1}}{1 - a} \right) \\ \sum_{i=1}^n a^i \left(\frac{1 - a^{n-i+1}}{1 - a} \right) &= \left(\frac{1}{1 - a} \right) \sum_{i=1}^n a^i(1 - a^{n-i+1}) = \left(\frac{1}{1 - a} \right) \sum_{i=1}^n (a^i - a^{n+1}) = \\ \frac{1}{1 - a} \left(-\frac{-a^{n+1} + a^n a^2(n+1) - a^n a(n+1)}{a-1} + \frac{-a + a^n a^2 - a^n a}{a-1} \right) &= \frac{-a^{n+1} + a^{n+2}n - a^{n+1}n + a}{(a-1)^2} \\ \sum_{k=1}^n ka^k &= a^{n+1} \frac{(n+1)a - n - 1 - a}{(a-1)^2} + \frac{a}{(a-1)^2} = \frac{-a^{n+1} + a^{n+2}n - a^{n+1}n + a}{(a-1)^2} \end{aligned}$$

1. Sean las expresiones $\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^n$ y $\left(x^3 + \frac{1}{x^2}\right)^n$

- a. Determine (si es posible) $n \in \mathbb{N}$, de manera que los terceros términos en los desarrollos de ambos binomios sean iguales.
b. si $n = 30$ determine (si es posible) , en ambos binomios , el término independiente de x .

RESPUESTA 2

- a. $\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^n$ el termino número tres es de la forma
 $\binom{n}{2} \cdot (x^2)^{n-2} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^2 = \frac{n!}{(n-2)!2!} \cdot (x)^{2n-6}$
 $\left(x^3 + \frac{1}{x^2}\right)^n$ el termino número tres es de la forma
 $\binom{n}{2} \cdot (x^3)^{n-2} \cdot \left(\frac{1}{x^2}\right)^2 = \frac{n!}{(n-2)!2!} \cdot (x)^{3n-10}$

si igualamos los dos polinomios obtenemos que :

$$\frac{n!}{(n-2)!2!} \cdot (x)^{2n-6} = \frac{n!}{(n-2)!2!} \cdot (x)^{3n-10} / \cdot \left(\frac{n!}{(n-2)!2!} \right)^{-1}$$

$$(x)^{2n-6} = (x)^{3n-10} \quad / \text{ por propiedad de potencias}$$

$$2n - 6 = 3n - 10$$

$$4 = n$$

por lo tanto existe $n \in \mathbb{N}$ y es igual a 4.

b.

en el binomio $\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^n$ si $n = 30$ se tiene que $\binom{30}{k} x^{60-3k}$ luego

$x^{60-3k} = x^0$ por propiedad de potencias se tiene que

$$60 - 3k = 0$$

$$20 = k$$

en el binomio $\left(x^3 + \frac{1}{x^2}\right)^n$ si $n = 30$ se tiene que $\binom{30}{k} (x)^{90-5k} \left(\frac{1}{x^2}\right)^k$ luego

$x^{90-5k} = x^0$ por propiedad de potencias se tiene que

$$90 - 5k = 0$$

$$18 = k$$

1. Encuentre la fórmula para $\prod_{k=1}^n (k+7)$

((justifique bien su respuesta))

RESPUESTA 1

$$\text{Resolver } \prod_{k=1}^n (k+7) = \frac{(n+7)!}{7!}$$

aplicamos un cambio de variable a los indices de la productoria donde $I = (k+7)$

$$\prod_{I=8}^{n+7} I = \frac{\prod_{I=1}^{n+7} I}{\prod_{I=1}^7 I} = \frac{(n+7)!}{7!} \quad \text{por lo tanto se tiene que } \prod_{k=1}^n (k+7) = \prod_{I=8}^{n+7} I = \frac{(n+7)!}{7!}$$

2. Sean las expresiones $\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^n$ y $\left(x^3 + \frac{1}{x^2}\right)^n$

a. Determine (si es posible) $n \in \mathbb{N}$, de manera que los terceros términos en los desarrollos de ambos binomios sean iguales.

b. si $n = 18$ determine el o los terminos centrales de ambos binomios.

RESPUESTA 2

a. $\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^n$ el termino número tres es de la forma

$$\binom{n}{2} \cdot (x^2)^{n-2} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^2 = \frac{n!}{(n-2)!2!} \cdot (x)^{2n-6}$$

$\left(x^3 + \frac{1}{x^2}\right)^n$ el termino número tres es de la forma

$$\binom{n}{2} \cdot (x^3)^{n-2} \cdot \left(\frac{1}{x^2}\right)^2 = \frac{n!}{(n-2)!2!} \cdot (x)^{3n-10}$$

si igualamos los dos polinomios obtenemos que :

$$\begin{aligned} \frac{n!}{(n-2)!2!} \cdot (x)^{2n-6} &= \frac{n!}{(n-2)!2!} \cdot (x)^{3n-10} / \cdot \left(\frac{n!}{(n-2)!2!}\right)^{-1} \\ (x)^{2n-6} &= (x)^{3n-10} \quad / \text{ por propiedad de potencias} \\ 2n - 6 &= 3n - 10 \\ 4 &= n \end{aligned}$$

por lo tanto existe $n \in \mathbb{N}$ y es igual a 4.

b.

en el binomio $\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^n$ si $n = 18$ se tiene que $\binom{18}{k} x^{36-3k}$ luego

$x^{36-3k} = x^0$ por propiedad de potencias se tiene que

$$36 - 3k = 0$$

$$12 = k$$

en el binomio $\left(x^3 + \frac{1}{x^2}\right)^n$ si $n = 18$ se tiene que $\binom{18}{k} (x)^{54-3k} \left(\frac{1}{x^2}\right)^k$ luego

$x^{54-5k} = x^0$ por propiedad de potencias se tiene que

$$54 - 5k = 0$$

$\frac{54}{5} = k$ por lo tanto no existe k perteneciente a los naturales tal que cumpla con un $n = 18$

1. Encuentre la fórmula para $\sum_{j=1}^n \left(\prod_{k=1}^j \frac{1}{k+1} - \prod_{k=1}^{j+1} \frac{1}{k+1} \right)$

((justifique bien su respuesta))

RESPUESTA 1

1. $\sum_{j=1}^n \left(\prod_{k=1}^j \left(\frac{1}{k+1} \right) - \prod_{k=1}^{j+1} \left(\frac{1}{k+1} \right) \right)$

$$\prod_{k=1}^{j+1} \left(\frac{1}{k+1} \right) = \left(\frac{1}{2} \right) * \left(\frac{1}{3} \right) * \dots * \left(\frac{1}{j+2} \right) = \frac{1}{(j+2)!}$$

$$\prod_{k=1}^j \left(\frac{1}{k+1} \right) = \left(\frac{1}{2} \right) * \left(\frac{1}{3} \right) * \dots * \left(\frac{1}{j+1} \right) = \frac{1}{(j+1)!}$$

(propiedad telescópica de la sumatoria telescópica) $\sum_{j=1}^n \frac{1}{(j+1)!} - \frac{1}{(j+2)!} = \frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)!}$

luego $\sum_{j=1}^n \left(\prod_{k=1}^j \left(\frac{1}{k+1} \right) - \prod_{k=1}^{j+1} \left(\frac{1}{k+1} \right) \right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)!}$

2. Sean las expresiones $\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^n$ y $\left(x^3 + \frac{1}{x^2}\right)^n$

a. Determine (si es posible) $n \in \mathbb{N}$, de manera que los terceros términos en los desarrollos de ambos binomios sean iguales.

- b. si $n = 50$ determine (si es posible), en ambos binomios, el término independiente de x

RESPUESTA 2

- a. $\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^n$ el término número tres es de la forma

$$\binom{n}{2} \cdot (x^2)^{n-2} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^2 = \frac{n!}{(n-2)!2!} \cdot (x)^{2n-6}$$

$\left(x^3 + \frac{1}{x^2}\right)^n$ el término número tres es de la forma

$$\binom{n}{2} \cdot (x^3)^{n-2} \cdot \left(\frac{1}{x^2}\right)^2 = \frac{n!}{(n-2)!2!} \cdot (x)^{3n-10}$$

si igualamos los dos términos de los polinomios obtenemos que :

$$\frac{n!}{(n-2)!2!} \cdot (x)^{2n-6} = \frac{n!}{(n-2)!2!} \cdot (x)^{3n-10} \quad / \cdot \left(\frac{n!}{(n-2)!2!}\right)^{-1}$$

$$(x)^{2n-6} = (x)^{3n-10} \quad / \text{ por propiedad de potencias}$$

$$2n - 6 = 3n - 10$$

$$4 = n$$

por lo tanto existe $n \in \mathbb{N}$ y es igual a 4.

- b. en el binomio $\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^n$ si $n = 50$ se tiene que $\binom{50}{k} x^{100-3k}$ luego

$x^{100-3k} = x^0$ por propiedad de potencias se tiene que

$$100 - 3k = 0$$

$\frac{100}{3} = k$ por lo tanto no existe k perteneciente a los naturales tal que cumpla con un $n = 50$

en el binomio $\left(x^3 + \frac{1}{x^2}\right)^n$ si $n = 50$ se tiene que $\binom{50}{k} (x)^{150-3k} \left(\frac{1}{x^2}\right)^k$ luego

$x^{150-5k} = x^0$ por propiedad de potencias se tiene que

$$150 - 5k = 0$$

$$30 = k$$

1. Encuentre la fórmula para $\sum_{k=1}^n \log(k)$

$\log(1) + \log(2) + \dots + \log(n)$ por propiedad de logaritmo tenemos finalmente que

$$\log(1 * 2 * \dots * n) = \log(n!)$$

$$\sum_{k=1}^n \log(k) = \log(n!)$$

((justifique bien su respuesta))

RESPUESTA 1

2. Sean las expresiones $\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^n$ y $\left(x^3 + \frac{1}{x^2}\right)^n$

- a. Determine (si es posible) $n \in \mathbb{N}$, de manera que los terceros términos en los desarrollos de ambos binomios sean iguales.
- b. si $n = 15$ determine el o los términos centrales de ambos binomios.

RESPUESTA 2

a. $\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^n$ el termino número tres es de la forma

$$\binom{n}{2} \cdot (x^2)^{n-2} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^2 = \frac{n!}{(n-2)!2!} \cdot (x)^{2n-6}$$

$\left(x^3 + \frac{1}{x^2}\right)^n$ el termino número tres es de la forma

$$\binom{n}{2} \cdot (x^3)^{n-2} \cdot \left(\frac{1}{x^2}\right)^2 = \frac{n!}{(n-2)!2!} \cdot (x)^{3n-10}$$

si igualamos los dos terminos de los polinomios obtenemos que :

$$\frac{n!}{(n-2)!2!} \cdot (x)^{2n-6} = \frac{n!}{(n-2)!2!} \cdot (x)^{3n-10} / \cdot \left(\frac{n!}{(n-2)!2!}\right)^{-1}$$

$$(x)^{2n-6} = (x)^{3n-10} / \text{por propiedad de potencias}$$

$$2n - 6 = 3n - 10$$

$$4 = n$$

por lo tanto existe $n \in \mathbb{N}$ y es igual a 4.

b. en el binomio $\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^n$ si $n = 15$ se tiene que $\binom{15}{k} x^{30-3k}$ luego

$$x^{30-3k} = x^0 \text{ por propiedad de potencias se tiene que}$$

$$30 - 3k = 0$$

$$10 = k$$

en el binomio $\left(x^3 + \frac{1}{x^2}\right)^n$ si $n = 15$ se tiene que $\binom{15}{k} (x)^{45-3k} \left(\frac{1}{x^2}\right)^k$ luego

$$x^{45-5k} = x^0 \text{ por propiedad de potencias se tiene que}$$

$$45 - 5k = 0$$

$$9 = k$$