

Control 7

(01/10/04)

1. Demostrar por inducción que la suma de los n primeros terminos al cubo es un cuadrado perfecto

De lo anterior obtenemos:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \dots + n)^2 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2$$

i) Por demostrar $P_{(1)} \rightarrow V$

$$P_{(1)} = 1^3 = \left(\frac{1(2)}{2} \right)^2 = 1 \quad \therefore P_{(1)} \rightarrow V$$

ii) Por demostra $P_k \Rightarrow P_{k+1}$ Sea $k \in \mathbb{N}$, cualquiera, tal que $P_{(k)} \rightarrow V$, para probar que $P_{(k+1)} \rightarrow V$

$$\text{Luego: } P_k : 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + k^3 = \left(\frac{k(k+1)}{2} \right)^2 \quad \text{Hipotesis}$$

$$P_{k+1} : 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + k^3 + (k+1)^3 = \left(\frac{(k+1)(k+2)}{2} \right)^2 \quad \text{Tesis}$$

$$\text{Ahora } 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + k^3 = \left(\frac{k(k+1)}{2} \right)^2 \quad / \quad + (k+1)^3 \Rightarrow$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + k^3 + (k+1)^3 = \left(\frac{k(k+1)}{2} \right)^2 + (k+1)^3 \Rightarrow$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + k^3 + (k+1)^3 = (k+1)^2 \left(\frac{k^2}{4} + k + 1 \right) \Rightarrow$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + k^3 + (k+1)^3 = (k+1)^2 \left(\frac{k^2 + 4k + 4}{4} \right) \Rightarrow$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + k^3 + (k+1)^3 = (k+1)^2 \frac{(k+2)^2}{4} \Rightarrow$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + k^3 + (k+1)^3 = \left(\frac{(k+1)(k+2)}{2} \right)^2$$

$$\therefore P_k \Rightarrow P_{k+1} \rightarrow V$$

De i) y ii) queda demostrado.

2. La décimo novena olimpiada de la era moderna se realizó en México en 1968. Esta se lleva a cabo cada cuatro años, por tanto podemos saber en qué año se llevó a cabo la olimpiada número ocho que se realizó en París, Francia.

Por P.A. sabemos que $a_n = a + (n-1)d$

Donde a es el primer término y d es la diferencia.

Como la decimo novena se realizo en 1968 y además la olimpiada se realiza cada 4 años, entonces:

$$a_{19} = 1968 \quad \text{y} \quad d = 4$$

$$\text{Luego: } 1968 = a + 18 \cdot 4$$

$$a = 1896$$

Ahora sabemos que la primera olimpiada se realizó

en 1968.

$$\text{Por lo tanto: } a_9 = 1896 + (9-1) \cdot 4$$

$$a_9 = 1928$$

Luego la olimpiada 8 se realizo el año 1928 en Francia.

3. Demostrar que $10^n + 3 \cdot 4^{n+2} + 5$ es divisible por 9, $\forall n \in \mathbb{N}$

i) Analicemos $P_{(1)}$

$$P_{(1)} = 10^1 + 3 \cdot 4^3 + 5 = 207 = 23 \cdot 9$$

Por lo tanto el primer término es divisible por 9.

ii) Sea $k \in \mathbb{N}$ cualquiera, tal que $P_{(k)} \rightarrow V$, para probar $P_{(k+1)} \rightarrow V$. Entonces:

$$P_{(k)} : 10^k + 3 \cdot 4^{k+2} + 5 = 9u$$

$$P_{(k+1)} : 10^{k+1} + 3 \cdot 4^{k+2+1} + 5 = 9v$$

$$\text{Así : } 10^{k+1} + 3 \cdot 4^{k+2+1} + 5 \Rightarrow$$

$$10^k \cdot 10 + 3 \cdot 4^{k+2} \cdot 4 + 5 \Rightarrow$$

$$10^k(9+1) + 3 \cdot 4^{k+2}(3+1) + 5 \Rightarrow$$

$$(10^k + 3 \cdot 4^{k+2} + 5) + 9 \cdot 10^k + 9 \cdot 4^{k+2} \Rightarrow$$

↓

$$9u + 9(10^k + 4^{k+2}) \Rightarrow$$

$$9(u + 10^k + 4^{k+2}) = 9v$$

Por lo tanto como lo anterior siempre es múltiplo de 9, entonces queda demostrado por inducción.

4. Demostrar que el término de lugar $(n+1)$ de una P.G cuyo primer término es "a" y el tercer término es "b", es igual al término de lugar $(2n+1)$ de otra P.G cuyo primer término es "a" y cuyo quinto término es "b".

Sea c y d nuestras dos P.G. respectivamente, y además r_c y r_d razones de c y d , entonces:

$$c_n = a \cdot r_c^{n-1}$$

y

$$d_n = a \cdot r_d^{n-1}$$

Luego:

$$c_1 = a$$

$$d_1 = a$$

$$c_3 = b = a \cdot r_c^2$$

$$d_5 = b = a \cdot r_d^4$$

De c_3 y d_5 tenemos:

$$b = a \cdot r_c^2 \Rightarrow r_c = \sqrt{\frac{b}{a}}$$

$$b = a \cdot r_d^4 \Rightarrow r_d = \sqrt[4]{\frac{b}{a}}$$

Ahora:

$$c_{n+1} = a \cdot r_c^n$$

$$d_{2n+1} = a \cdot r_d^{2n}$$

$$c_{n+1} = a \cdot \left(\sqrt{\frac{b}{a}} \right)^n$$

$$d_{2n+1} = a \cdot \left(\sqrt[4]{\frac{b}{a}} \right)^{2n} \text{ Simplificando,}$$

obtenemos:

$$d_{2n+1} = a \cdot \left(\sqrt{\frac{b}{a}} \right)^n$$

$$\text{Luego, } c_{n+1} = d_{2n+1} \cdot 0$$

5. Demostrar que si n es cualquier entero positivo, $\frac{1}{3}(n^3 + 2n)$ es un entero.

$$p(1) = \frac{1}{3}(1^3 + 2) = 1$$

luego la proposición se cumple para 1

supongamos verdadera la proposición para $p(n)$;

P.D. que es verdadera para $p(n+1)$

$$p(n+1) = \frac{1}{3}((n+1)^3 + 2(n+1))$$

$$= \frac{1}{3}((n+1)((n+1)^2 + 2))$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{3}((n+1)(n^2+2n+1+2)) \\
&= \frac{1}{3}((n+1)(n^2+2n+3)) \\
&= \frac{1}{3}(n^3+2n^2+3n+n^2+2n+3) \\
&= \frac{1}{3}(n^3+2n) + \frac{1}{3}(3n^2+3n+3)
\end{aligned}$$

se sabe que $\frac{1}{3}(n^3+2n)$ es entero por hipotesis inductiva

y además $\frac{1}{3}(3n^2+3n+3) = n^2+n+1$, donde claramente son numeros enteros, y además la suma de números enteros sigue siendo un número entero

Luego la proposición es verdadera.

6. Hallar una P.A cuyo primer término sea la mitad del cuarto término y tal que los términos de lugares 2, 10 y 34 formen una P.G.

P.A=

$$a_1 = a$$

$$a_2 = a + d$$

$$a_3 = a + 2d$$

$$a_4 = a + 3d$$

•

$$a_n = a + (n-1)d$$

Pero se sabe que $a_1 = \frac{1}{2}a_4$

$$\text{Luego } a = \frac{1}{2}(a + 3d)$$

$$d = \frac{a}{3}$$

Luego debemos verificar que a_2, a_{10}, a_{34} estan en PG, para ello

$$a_2 = a_2$$

$$a_{10} = ra_2$$

$$a_{34} = r^2a_2$$

Pero

7. $a_2 = \frac{4}{3}a$

8. $a_{10} = a + \frac{9}{3}a = 4a$

9. $a_{34} = a + \frac{33}{3}a = 12a$

Luego

$$4a = \frac{4}{3}ar$$

$$12a = \frac{4}{3}r^2a$$

De donde es facil ver que estan en PG, y que la razon es 3 para cualquier a

Luego la P.A queda de la forma:

$$a_n = a + (n-1)\frac{a}{3}.$$

10. Demostrar que: $3^{4n+2} + 5^{2n+1}$ es múltiplo de 14 $\forall n \in \mathbb{N}$

$$p(1) = 3^{4+2} + 5^{2+1} = 854 = 14 \cdot 61$$

luego la proposición se cumple para 1

supongamos verdadera la proposición para $p(n)$;

P.D. que es verdadera para $p(n+1)$

$$\begin{aligned} p(n+1) &= 3^{4(n+1)+2} + 5^{2(n+1)+1} \\ &= 3^{4n+2+4} + 5^{2n+1+2} \\ &= 3^{4n+2} 3^4 + 5^{2n+1} 5^2 \\ &= 3^{4n+2} 81 + 5^{2n+1} 25 \\ &= 3^{4n+2} (70 + 11) + 5^{2n+1} (11 + 14) \\ &= 70(3^{4n+2}) + 11(3^{4n+2}) + 11(5^{2n+1}) + 14(5^{2n+1}) \\ &= 11(3^{4n+2} + 5^{2n+1}) + 14(5^{2n+1} + 5(3^{4n+2})) \end{aligned}$$

se sabe que $3^{4n+2} + 5^{2n+1}$ es múltiplo de 14 por hipótesis inductiva, luego $11(3^{4n+2} + 5^{2n+1})$, y además $14(5^{2n+1} + 5(3^{4n+2}))$ es claramente múltiplo de 14, y la suma de dos múltiplos de 14 es múltiplo de 14.

Luego la proposición es verdadera.

11. Tres números cuya suma es 35 forman una P.G. Si al primer número se le resta 1, al segundo 2 y al tercero 8, los números quedan en P.A. ¿Cuales son los números?.

la suma de tres números que están en P.G. es 35

luego $x + y + z = 35$, y además

$$\frac{y}{x} = \frac{z}{y} \text{ ya que están en P.G.}$$

También se sabe que si al primer número se le resta 1, al segundo 2 y al tercero 8, los números quedan en P.A.

$$\text{lo que implica que } y - 2 - (x - 1) = z - 8 - (y - 2) \Leftrightarrow 2y - x - z = -5$$

luego tenemos el siguiente sistema

$$1) x + y + z = 35$$

$$2) \frac{y}{x} = \frac{z}{y}$$

$$3) 2y - x - z = -5$$

si sumamos 1) y 3) tenemos que

$$3y = 30$$

$$*y = 10$$

en 1)

$$**x + z = 25$$

$$*y \text{ ** en 2)}$$

$$100 = 25x - x^2 \text{ lo que implica que } x = 5 \vee x = 20$$

para $x = 5$ en 1) se tiene que

$$z = 20$$

para $x = 20$ en 1) se tiene que

$$z = 5$$

luego los números son 5, 10, 20

se deja la comprobación al alumno de que el orden en que se tomen no afecta las condiciones.