

POLINOMIOS

La teoría de ecuaciones está basada en el *Algebra de Polinomios* y, de lo que hemos visto sobre álgebra elemental, el estudiante ya posee cierta familiaridad con los procesos de sumar, restar, multiplicar y factorizar polinomios sobre \mathcal{R} . Todas las reglas operacionales mencionadas en secciones anteriores son utilizadas para manipular estos polinomios. En esta sección queremos formalizar un poco más estas nociones, estudiar el algoritmo de la división para polinomios y luego volver a estudiar la resolución de ecuaciones e inecuaciones a través de un estudio elemental sobre ceros de polinomios.

DEFINICIÓN 1: Un polinomio (o función polinomial) en una variable sobre \mathcal{R} , es una expresión de la forma

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n, \quad n \in \mathbb{N} \quad (1)$$

donde $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ son constantes reales y la variable x toma valores en \mathcal{R} .

OBSERVACIONES

- 1) Para $0 \leq i \leq n$, las expresiones a_ix^i las llamaremos los términos del polinomio y los elementos a_i los coeficientes de los correspondientes x^i
- 2) Para representar polinomios utilizaremos expresiones tales como:

$$a(x), b(x), \dots, p(x), q(x), r(x), \text{etc.}$$

DEFINICIÓN 2: Sea $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ un polinomio sobre \mathbb{R} . Entonces:

- i) si $a_n \neq 0$, diremos que $p(x)$ es un polinomio de grado n ($n \in \mathbb{N}$) y lo escribiremos:

$$gr(p(x)) = n,$$

al número a_n lo llamaremos el *coeficiente principal* de $p(x)$ y, en particular, si $a_n = 1$ diremos que $p(x)$ es mónico;

- ii) Si $a_i = 0$ para cualquier $i = 0, 1, \dots, n$, entonces diremos que $p(x)$ es el polinomio cero (o polinomio nulo) y lo denotaremos también por $0(x)$.

OBSERVACIONES:

- 1) En general, cualquier número real puede ser considerado como un polinomio de grado cero y, en tal caso, los llamaremos *polinomios constantes*. Además, al término a_0 en (1) lo llamaremos el término constante de $p(x)$.
- 2) Usaremos la notación:

$$\begin{aligned} R[x] &:= \{p(x)/p(x) \text{ es un polinomio en } x \text{ sobre } R\} \\ P_n &:= \{p(x) \in R[x] \mid gr(p(x)) \leq n\} \end{aligned}$$

DEFINICIÓN 3: Dados dos polinomios

$$\begin{aligned} p(x) &= a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n, \\ q(x) &= b_0 + b_1x + \dots + b_mx^m, \end{aligned}$$

diremos que $p(x)$ y $q(x)$ son iguales ssi:

- i) $m = n$ (igual número de términos).

ii) $a_i = b_i \quad \forall i = 0, 1, \dots, n$ (iguales coeficientes).

NOTA: Dos polinomios cualesquiera pueden escribirse con el mismo número de términos. Por ejemplo, si en Def. 3 se tuviera que $m < n$, entonces

$$q(x) = b_0 + b_1x + \dots + b_mx^m = b_0 + b_1x + \dots + b_mx^m + 0x^{m+1} + \dots + 0x^n.$$

Así, la siguiente definición es completamente general.

DEFINICIÓN 4: Sean

$$\begin{aligned} p(x) &= a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n, \text{ y} \\ q(x) &= b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_nx^n, \end{aligned}$$

dos polinomios en x sobre R . Entonces:

i) La suma de $p(x)$ y $q(x)$ es el polinomio:

$$p(x) + q(x) = a_0 + b_0 + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + \dots + (a_n + b_n)x^n$$

ii) El negativo de $q(x)$ es el polinomio:

$$\begin{aligned} -q(x) &= (-b_0) + (-b_1)x + (-b_2)x^2 + \dots + (-b_n)x^n \\ &= -b_0 - b_1x - b_2x^2 - \dots - b_nx^n. \end{aligned}$$

iii) La resta $p(x) - q(x)$ es el polinomio: $p(x) + (-q(x))$

DEFINICIÓN 5: Sean:

$$\begin{aligned} p(x) &= a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n \\ q(x) &= b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_mx^m \end{aligned}$$

dos polinomios en x sobre R . El producto de $p(x)$ y $q(x)$ es el polinomio:

$$\begin{aligned} p(x) \cdot q(x) &= a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)x^2 + \dots + \\ &\quad + (a_nb_m)x^{m+n}. \end{aligned}$$

Es decir, el coeficiente de x^i en $p(x) \cdot q(x)$ es el número:

$$a_0b_i + a_1b_{i-1} + \dots + a_{i-1}b_1 + a_ib_0.$$

NOTA: Para efectuar la multiplicación de dos polinomios resulta útil el arreglo siguiente que aplicamos a la multiplicación de $p(x) = 1+2x-x^2+x^3$ por $q(x) = 1-2x+x^2$:

	1	+	2x	-	x ²	+	x ³	
	1	-	2x	+	x ²			
	1	+	2x	-	x ²	+	x ³	
			-	2x	-	4x ²	+	2x ³
						x ²	+	2x ³
							-	x ⁴
								+
								x ⁵
$p(x) \cdot q(x) =$	1			-	4x ²	+	5x ³	-
								3x ⁴
								+
								x ⁵

[Mult. por 1]

[Mult. por -2x]

[Mult. por x²]

[Suma]

OBSERVACIONES: Proponemos al estudiante verificar que $(R[x], +, \cdot)$ satisface los axiomas 1 al 5 que dimos para $(R, +, \cdot)$ y donde los elementos neutros para la suma y el producto son los mismos (0 y 1).

TEOREMA 1: (*Algoritmo de la división*) Sean $a(x), b(x) \in R[x]$ con $b(x) \neq 0$. Entonces existen dos únicos polinomios $q(x), r(x) \in R[x]$ tales que: $a(x) = q(x) \cdot b(x) + r(x)$ donde $r(x) = 0$ ó $gr(r(x)) > gr(b(x))$.

Ejemplo: Consideremos los polinomios $a(x) = x^3 + 2x + 3$, $b(x) = 2x^2 - 3x + 1$.

El estudiante debe estar familiarizado con el proceso de división para encontrar $q(x)$ y $r(x)$ que mostramos a continuación:

$$\begin{array}{r} x^3 : (2x^2 - 3x + 1) = \frac{1}{2}x + \frac{3}{4} \\ \underline{x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x} \\ \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + 3 \\ \underline{\frac{3}{2}x^2 - \frac{9}{4}x + \frac{3}{4}} \\ \phantom{\frac{3}{2}x^2} \frac{15}{4}x + \frac{9}{4} \end{array}$$

Entonces:

$$x^3 + 2x + 3 = \left(\frac{1}{2}x + \frac{3}{4}\right) \cdot (2x^2 - 3x + 1) + \left(\frac{15}{4}x + \frac{9}{4}\right)$$

con $gr(r(x)) = gr\left(\frac{15}{4}x + \frac{9}{4}\right) = 1 < gr(2x^2 - 3x + 1) = 2$.

Al polinomio $q(x)$ lo llamaremos el cociente y al polinomio $r(x)$ el *resto* en la división de $a(x)$ por $b(x)$.

COROLARIO: (*Teorema del resto*) El resto de la división de un polinomio $p(x)$ por $x - a$ es $p(a)$.

DEFINICIÓN 6: Sean $a(x), b(x) \in R[x]$. Diremos que el polinomio $a(x)$ es *divisible* por el polinomio $b(x)$ (o bien que $b(x)$ es un *factor* de $a(x)$) y escribiremos: $b(x) \mid a(x)$, ssi existe $c(x) \in R[x]$ tal que $a(x) = c(x) \cdot b(x)$.

COROLARIO: (*Teorema del factor*) Un polinomio $p(x)$ es divisible por $x - a$ ssi $p(a) = 0$.

DIVISIÓN SINTÉTICA: Para facilitar la búsqueda del cociente $q(x)$ y el resto $r(x)$ cuando un polinomio sobre R es dividido por $x - c$, introduciremos el *método de división sintética* que escribiremos a continuación:

Sean

$$\begin{aligned} p(x) &= a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n \\ q(x) &= b_0 + b_1x + \cdots + b_{n-1}x^{n-1} \end{aligned} \quad (1)$$

Entonces

$$\begin{aligned} p(x) &= (x - c)q(x) + r(x) = \\ &= (r - cb_0) + (b_0 - cb_1)x + (b_1 - cb_2)x^2 + \cdots + \\ &\quad \cdots + (b_{n-2} - cb_{n-1})x^{n-1} + b_{n-1}x^n. \end{aligned} \quad (2)$$

(Aquí $r(x) \equiv r$)

Igualando los coeficientes de $p(x)$ en (1) y (2) se tiene que

$$\begin{aligned}
a_n &= b_{n-1} \\
a_{n-1} &= b_{n-2} - cb_{n-1}, \dots, \\
a_1 &= b_0 - cb_1, \\
a_0 &= r - cb_0
\end{aligned}$$

Para la computación el trabajo puede ordenarse como sigue:

	a_n	a_{n-1}	\dots	a_1	a_0
c		cb_{n-1}	\dots	cb_1	cb_0
	$b_{n-1} = a_n$	$b_{n-2} = a_{n-1} + cb_{n-1}$	\dots	$b_0 = a_1 + cb_1$	$r = a_0 + cb_0$

Así solamente listando los coeficientes y realizando simples multiplicaciones y sumas, podemos leer el polinomio cociente y el resto, de la última línea.

DEFINICIÓN 7: Sea $p(x) \in R[x]$ con $gr(p(x)) > 0$. Diremos que $p(x)$ es un *polinomio irreducible* en $R[x]$ ssi los únicos factores de $p(x)$ son polinomios constantes o múltiplos constantes de $p(x)$. En caso contrario, diremos que $p(x)$ es *reducible* sobre $R[x]$.

TEOREMA 2: Todo polinomio $p(x) \in R(x)$ con $gr(p(x)) > 0$ puede escribirse como producto de un número real distinto de cero y polinomios mónicos irreducibles sobre $R[x]$. Además, salvo el orden de los factores, esta expresión es única.

Ejemplo:

Sea $p(x) = 2x^5 - 4x^4 + 14x^2 - 8x - 12$. Entonces $p(x) = 2(x^2 + x + 1)(x^2 + 2)(x - 3)$ donde $2 \in R$ y $x^2 + x + 1$, $x^2 + 2$ y $x - 3$ son polinomios mónicos irreducibles en $R[x]$.

NOTAS:

- 1) Sea $b(x) \in R[x]$, $gr(p(x)) > 0$. Si $p(c) = 0$ para algún $c \in R$, entonces $p(x)$ es reducible en $R[x]$ pues, por el Teor. del Factor, $x - c$ es un factor de $p(x)$.
- 2) El estudiante puede comprobar fácilmente que los polinomios irreducibles en $R[x]$ son polinomios lineales (de primer grado) y los polinomios cuadráticos: $d(x) = ax^2 + bx + c$, con $b^2 - 4ac < 0$.
Luego, dado $p(x) \in R[x]$, este polinomio puede escribirse (Teor.2) en la forma:
 $p(x) = a(x - r_1)(x - r_2) \dots (x - r_k)d_1(x) \cdot d_2(x) \dots d_m(x)$
donde $a, r_1, \dots, r_k \in R$ y para $i = 1, 2, \dots, m$,
 $d_i(x) = a_i x^2 + b_i x + c_i$ con $a_i \neq 0$ y
 $b_i^2 - 4a_i c_i < 0$.

CEROS DE POLINOMIOS (*Raíces de ecuaciones polinómicas*).

DEFINICIÓN 8: Sea $p(x) \in R[x]$. Un número real c se llama un cero de $p(x)$ en R (*raíz* de la ecuación $p(x) = 0$ en R) ssi $p(c) = 0$.

OBSERVACIONES:

- 1) Por el *Teor. del Factor*, si c es un cero de $p(x)$, entonces $x - c$ es un factor de $p(x)$; es decir existe $q(x)$ tal que $p(x) = q(x) \cdot (x - c)$.
- 2) Un cero $c \in R$ del polinomio $p(x) \in R[x]$ se dice que tiene *multiplicidad* m si $(x - c)^m$ divide a $p(x)$, pero $(x - c)^{m+1}$ no divide a $p(x)$ en $R[x]$. Luego, si c tiene multiplicidad m entonces: $p(x) = b(x)(x - c)^m$, donde $b(x) \in R[x]$ es tal que $b(c) \neq 0$. Los ceros de multiplicidad uno son llamados, usualmente *ceros simples*.
- 3) Al estudiar la ecuación de segundo grado: $ax^2 + bx + c = 0$, establecimos la relación entre sus raíces (ceros del trinomio de segundo grado) y los coeficientes del trinomio de segundo grado $ax^2 + bx + c$. Se r_1 y r_2 son dichas raíces, entonces:

$$\begin{aligned} r_1 + r_2 &= -b/a \\ r_1 r_2 &= c/a \end{aligned}$$

El teorema siguiente generaliza este resultado para un polinomio $p(x) \in R[x]$ cualquiera.

TEOREMA 3: Si r_1, r_2, \dots, r_n son los ceros del polinomio $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$, entonces

$$\begin{aligned} S_1 &= r_1 + r_2 + \dots + r_n = -a_{n-1}/a_n \\ S_2 &= r_1 r_2 + \dots + r_j r_k + \dots + r_{n-1} r_n = a_{n-2}/a_n \\ S_3 &= r_1 r_2 r_3 + \dots + r_i r_j r_k + \dots + r_{n-2} r_{n-1} r_n = -a_{n-3}/a_n \\ &\dots \\ S_n &= r_1 r_2 \dots r_n = (-1)^n a_0/a_n \end{aligned}$$

Es decir la suma S_k de todos los productos de k ceros distintos, $k = 1, 2, \dots, n$, es igual a $(-1)^k a_{n-k}/a_n$.

TEOREMA 4: Sea $p(x) \in R[x]$. y sean $a, b \in R$, con $a < b$, tales que $p(a) \cdot p(b) < 0$. Entonces existe $c \in (a, b)$ tal que $p(c) = 0$.

TEOREMA 5: Sea $p(x) \in R[x]$. Entonces si el $gr(p(x))$ es impar $\Rightarrow p(x)$ tiene, al menos, un cero en R .

TEOREMA 6: Si p/q (fracción reducida a sus menores términos) es raíz de la ecuación (cero del polinomio): $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0 = 0$, con coeficientes enteros, entonces q es divisor de a_n y p es divisor de a_0 .

TEOREMA 7: Si la ecuación $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0 = 0$, con coeficientes racionales, tiene una raíz $p + \sqrt{q}$, con p y q racionales, entonces $p - \sqrt{q}$ también es raíz de ella.

TEOREMA 8: (*Regla de los signos de Descartes*) Sea $p(x) \in R[x]$.

Entonces, en la ecuación $p(x) = 0$:

- i) el número de raíces positivas es menor o igual que el número de cambios de signo en los coeficientes de $p(x)$, y
- ii) el número de raíces negativas es menor o igual que el número de cambios de signo en $p(-x)$.

OBSERVACIONES:

- i) Consideremos la ecuación:

$$p(x) = 2x^8 + 3x^7 - x^3 + 6x + 1 = 0$$

Entre los coeficientes de $p(x)$ hay dos cambios de signo; luego $p(x) = 0$ tiene cuando más, dos raíces positivas. Por otro lado, en la ecuación:

$$p(-x) = 2x^8 - 3x^7 + x^3 - 6x + 1 = 0,$$

hay cuatro cambios de signo, de donde $p(x) = 0$ tiene, cuando más, cuatro raíces negativas y, por lo tanto, al menos, dos raíces complejas conjugadas.

- ii) La Regla de los Signos permite, además, obtener información sobre la naturaleza de las raíces de una ecuación polinómica y, en muchos casos, por simple inspección. Por ejemplo:
 - i) la ecuación: $2x^5 + 3x^3 + 2x^2 + 1 = 0$, no puede tener ninguna raíz positiva;
 - ii) la ecuación $x^9 + 2x^7 + x^5 - 2x^4 + x^3 - 4x^2 + 6x - 5 = 0$ no tiene ninguna raíz negativa, pues $p(-x)$ no tiene cambios de signos en sus coeficientes;
 - iii) la ecuación $x^8 + 3x^6 + x^4 + 7 = 0$ no tiene raíces reales, pues ni $p(x)$ ni $p(-x)$ tienen cambios de signos en sus coeficientes.
 - iv) la ecuación $x^7 + 2x^5 + 4x^3 + x = 0$ no tiene raíces reales, excepto $x = 0$, pues ni $p(x)$ ni $p(-x)$ tienen cambios de signos en sus coeficientes; etc.

PROBLEMAS RESUELTOS:

1. Dados los polinomios en
- x
- sobre
- \mathbb{R}
- :

$$p(x) = 2x^3 + 5x^2 - 3x + 8$$

$$q(x) = 4x^2 + 7x - 3.$$

Encontrar:

a) $p(x) + q(x)$,

b) $p(x) \cdot q(x)$

c) $p(x) - q(x)$

Solución:

$$\begin{aligned} \text{a) } p(x) + q(x) &= (2+0)x^3 + (5+4)x^2 + (-3+7)x + 8-3 \\ &= 2x^3 + 9x^2 + 4x + 5 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} \begin{array}{ccccccc} 8 & - & 3x & + & 5x^2 & + & 2x^3 \\ -3 & + & 7x & + & 4x^2 & & \end{array} \\ \hline \text{b) } \begin{array}{ccccccc} -24 & + & 9x & - & 15x^2 & - & 6x^3 \\ & & 56x & - & 21x^2 & + & 35x^3 & + & 14x^4 \\ & & & & 32x^2 & - & 12x^3 & + & 20x^4 & + & 8x^5 \end{array} \\ \hline -24 & + & 65x & - & 4x^2 & + & 17x^3 & + & 34x^4 & + & 8x^5 = p(x) \cdot q(x) \end{array}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } p(x) - q(x) &= p(x) + (-q(x)) = \\ &= (2-0)x^3 + (5-4)x^2 + (-3-7)x + 8+3 \\ &= 2x^3 + x^2 - 10x + 11 \end{aligned}$$

2. Determinar las constantes reales
- A
- ,
- B
- , y
- C
- , para que se cumpla:

$$\frac{Ax^2 + Bx + C}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{2}{x-1} - \frac{9}{x-2} + \frac{8}{x-3},$$

donde $x \in \mathbb{R} - \{1, 2, 3\}$ *Solución:* La identidad dada se puede escribir:

$$\begin{aligned} \frac{Ax^2 + Bx + C}{(x-1)(x-2)(x-3)} &= \frac{2(x-2)(x-3) - 9(x-1)(x-3) + 8(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-2)(x-3)} \Leftrightarrow \\ Ax^2 + Bx + C &= 2(x-2)(x-3) - 9(x-1)(x-3) + 8(x-1)(x-2) = \\ &= x^2 + 2x + 1 \end{aligned}$$

Por comparación de coeficientes: $A = 1$, $B = 2$, $C = 1$.

3. Encontrar el cuociente y el resto cuando el polinomio $3x^3 - 4x + 2$ es dividido por $x + 3$.

Solución: Usando división sintética, tenemos:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 3 & 0 & -4 & 2 \\ -3 & & -9 & 27 & -69 \\ \hline & 3 & -9 & 23 & -67 \end{array}$$

lo que nos da: $3x^2 - 9x + 23$ como cuociente y -67 como resto.

NOTA: Recordemos que esto también se acostumbra realizar en la forma:

$$\begin{array}{r} (3x^3 - 4x + 2) : (x + 3) = 3x^2 - 9x + 23 \\ -(3x^3) + 9x^2 \\ \hline -9x^2 - 4x \\ -(-9x^2 - 27x) \\ \hline 23x + 2 \\ -(23x + 69) \\ \hline -67 \end{array}$$

4. ¿Para qué valores de a y b el polinomio $3x^2 + bx - b^2 - a$ es divisible por $x + 2$, pero al dividirlo por $x - 1$ da resto 1?

Solución:

a) Sea $p(x) = 3x^2 + bx - b^2 - a$.

Aplicando el teorema del resto: $p(-2) = 0$ $p(1) = 1$

$$\begin{array}{r} 12 - 2b - b^2 - a = 0 \\ 3 + b - b^2 - a = 1 \end{array} \quad \left| \right.$$

Restando la primera ecuación de la segunda:

$$\begin{array}{rcl} -9 + 3b & = & 1 \\ 3b & = & 10, \\ b & = & \frac{10}{3} \end{array}$$

y de la segunda ecuación:

$$a = 3 + b - b^2 - 1 = 3 + \frac{10}{3} - \frac{100}{9} - 1 = \frac{52}{9}$$

b) *Por división sintética:*

$$\begin{array}{r|rrr}
 & 3 & b & -b^2 - a \\
 -2 & & -6 & (12 - 2b) \\
 \hline
 & 3 & (-6 + b) & (12 - 2b - b^2 - a) \\
 1 & & 3 & 3 + b \\
 \hline
 & 3 & (3 + b) & 3 + b - b^2 - a
 \end{array}$$

$$\text{De aquí } \begin{array}{rrrrrr} 12 & - & 2b & - & b^2 & - & a & = & 0 \\ 3 & + & b & - & b^2 & - & a & = & 1 \end{array}$$

Sistema para a, b idéntico al obtenido en a).

5. Sea $p(x) = x^4 + bx^3 - 13x^2 - 14x + 24$

- a) Determinar $b \in R$, de modo que -2 sea raíz de $p(x)$.
 b) Determinar las raíces restantes.

Solución:

- a) Si -2 es raíz de $p(x)$, entonces $p(-2) = 0$, pero
 $p(-2) = 16 - 8b \Rightarrow 16 - 8b = 0 \Rightarrow b = 2$

- b) $x_1 = -2$:

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & 1 & 2 & -13 & -14 & 24 \\
 -2 & & -2 & 0 & 26 & -24 \\
 \hline
 & 1 & 0 & -13 & 12 & 0
 \end{array}$$

Polinomio residual: $p_1(x) = x^3 - 13x + 12$

Como la suma de los coeficientes es cero, 1 es raíz de $p_1(x)$ y, por lo tanto, de $p(x)$

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & 0 & -13 & 12 \\
 1 & & 1 & 1 & -12 \\
 \hline
 & 1 & 1 & -12 & 0
 \end{array}$$

Nuevo polinomio residual: $p_2(x) = x^2 + x - 12$, que por simple inspección se puede escribir: $p_2(x) = (x - 3)(x + 4)$.

Es decir, las raíces de $p(x)$ son: $-4, -2, 1, 3$.

6. Resolver la ecuación $3x^3 - 2x^2 - 6x + 4 = 0$

Solución: Los factores de 4 son $\pm 1, \pm 2, \pm 4$; los factores de 3 son $\pm 1, \pm 3$. Por lo tanto, las posibles raíces racionales son $\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 1/3, \pm 2/3, \pm 4/3$.

Investigando cada una de ellas (por ejm. por división sintética) se obtiene $x_1 = 2/3$ como única raíz racional y polinomio residual $3x^2 - 6$. Luego

$x_1 = 2/3$, $x_2 = \sqrt{2}$ $x_3 = -\sqrt{2}$ son las raíces de la ecuación dada.

7. De la ecuación $x^4 - x^3 - 15x^2 + 19x - 4 = 0$ se conoce la raíz $x_1 = 2 - \sqrt{3}$; determinar las otras raíces reales.

Solución: Si $x_1 = 2 - \sqrt{3}$ es raíz, $x_2 = 2 + \sqrt{3}$ también debe serlo. Por lo tanto, el polinomio del primer miembro debe ser divisible por

$$(x - x_1)(x - x_2) = x^2 - 4x + 1$$

$$\begin{array}{r} (x^4 - x^3 - 15x^2 + 19x - 4) : (x^2 - 4x + 1) = x^2 + 3x - 4 \\ -(x^4 - 4x^3 + x^2) \\ \hline 3x^3 - 16x^2 + 19x \\ -(3x^3 - 12x^2 + 3x) \\ \hline -4x^2 + 16x - 4 \\ -(-4x^2 + 16x - 4) \\ \hline 0 \end{array}$$

$x^2 + 3x - 4 = 0$ tiene raíces $x_3 = -4$, $x_4 = 1$.

Luego, -4 , $2 - \sqrt{3}$, 1 y $2 + \sqrt{3}$ son las raíces de la ecuación dada.

8. Demostrar que si $p(x)$ y $q(x)$ son polinomios tales que $q(x)$ es divisible por $p(x)$ y $p(x)$ es divisible por $q(x)$, entonces existe una constante c tal que $p(x) = cq(x)$.

Demostración: Como $q(x)$ es divisible por $p(x)$, existe un polinomio $q_1(x)$ tal que:

$$q(x) = p(x) \cdot q_1(x) \quad (1)$$

Análogamente, existe un polinomio $q_2(x)$ tal que

$$p(x) = q(x) \cdot q_2(x) \quad (2)$$

Reemplazando (2) en (1)

$$q(x) = q(x) \cdot q_2(x) \cdot q_1(x)$$

Luego $q(x) \cdot [1 - q_2(x)q_1(x)] = 0$, de donde

$$(i) \quad q(x) = 0 \quad \text{o} \quad (ii) \quad q_2(x)q_1(x) = 1$$

Si $q(x) = 0$, entonces, por (1) se tiene $p(x) = 0$, de donde resulta que $p(x) = c \cdot q(x)$ para cualquier $c \in R$.

Si $q_2(x) \cdot q_1(x) = 1$, entonces $gr(q_2(x)q_1(x)) = 0$;
 Es decir: $gr\ q_1(x) = gr\ q_2(x) = 0$

De aquí nos resulta que $q_2(x) = c \in R$, lo que, reemplazado en (2) nos da:
 $p(x) = cq(x)$

9. Sean $p(x)$, $q(x)$, $r(x)$ polinomios tales que $q(x)$ es divisible por $p(x)$ y $r(x)$ lo es por $q(x)$. Demostrar que $r(x)$ es divisible por $p(x)$.

Demostración: Existen polinomios $q_1(x)$, $q_2(x)$, tales que

$$q(x) = p(x) \cdot q_1(x) \quad (1)$$

$$r(x) = q(x) \cdot q_2(x) \quad (2)$$

Reemplazando (1) en (2):

$$r(x) = p(x)q_1(x)q_2(x) = p(x)q_3(x),$$

$$\text{donde } q_3(x) = q_1(x)q_2(x)$$

Luego, $r(x)$ es divisible por $p(x)$

10. Si $p(x)$ es un polinomio y $a, b \in R$, obtenga una expresión para el resto que se obtiene al dividir $p(x)$ por $(x - a)(x - b)$

Solución: Primero supondremos que $a = b$.

Tenemos, del algoritmo de la división, que:

$$p(x) = (x - a) \cdot q(x) + r \quad (1)$$

$$q(x) = (x - a) \cdot q_1(x) + r' \quad (2)$$

donde $q(x)$, $q_1(x)$ son ciertos polinomios y $r, r' \in R$.

De (1) $r = p(a)$, con lo cual resulta que

$$q(x) = [p(x) - p(a)] / (x - a) \quad (3)$$

De (2) $r' = q(a)$

Además, si reemplazamos (2) en (1) nos queda

$$p(x) = (x - a)^2 q_1(x) + r' \cdot (x - a) + r$$

Luego, el resto, en cuestión es

$$r(x) = r' \cdot (x - a) + r = q(a)(x - a) + p(a),$$

siendo $q(x)$ el polinomio definido en (3).

Supongamos ahora que $a \neq b$, entonces

$$p(x) = (x - a)(x - b)q(x) + r(x) \text{ con } \deg r(x) < \deg(x - a)(x - b).$$

$$\text{Por lo tanto: } p(x) = (x - a)(x - b)q(x) + cx + d$$

$$p(a) = ca + d \quad \text{y} \quad p(b) = cb + d$$

$$\text{De aquí: } c = \frac{p(a) - p(b)}{a - b}, \quad d = \frac{ap(b) - bp(a)}{a - b}$$

$$\text{finalmente } r(x) = \frac{p(a) - p(b)}{a - b}x + \frac{ap(b) - bp(a)}{a - b}$$

11. Sean $p(x) = ax^3 + 3bx^2 + 3cx + d$, $q(x) = ax^2 + 2bx + c$, con $a > 0$, tales que $p(x)$ es divisible por $q(x)$. Demostrar que $p(x)$ es el cubo de un binomio y $q(x)$ es el cuadrado de un binomio.

Demostración: Por hipótesis, existe $k \in R$ tal que $p(x) = q(x) \cdot (x + k)$.

Reemplazando $p(x)$ y $q(x)$ nos queda

$$ax^3 + 3bx^2 + 3cx + d = ax^3 + 2bx^2 + cx + kax^2 + 2kbx + kc.$$

$$\text{Esto es: } ax^3 + 3bx^2 + 3cx + d = ax^3 + (2b + ka)x^2 + (2kb + c)x + kc$$

Igualando coeficientes

$$\left. \begin{array}{lcl} 3b & = & 2b + ka \\ 3c & = & 2kb + c \\ d & = & kc \end{array} \right|$$

$$\text{De aquí: } b = ka, \quad c = kb, \quad d = kc = k^3a$$

$$\text{Luego } p(x) = a(x^3 + 3kx^2 + 3k^2x + k^3) = a(x + k)^3$$

$$= a(x + b/a)^3$$

$$q(x) = a(x^2 + 2kx + k^2) = a(x + k)^2 = a(x + b/a)^2$$

12. Sean $p(x) = x^2 + 1$, $q(x) = x^2 - 2x - 3$. Encontrar, $a(x)$, $b(x)$ tales que $a(x) \cdot p(x) + b(x) \cdot q(x) = 1$.

Solución: $x^2 + 1 = (x^2 - 2x - 3) \cdot 1 + 2x + 4$
 $x^2 - 2x - 3 = (2x + 4) \cdot 1/2 \cdot (x - 4) + 5$

Luego: $5 = (x^2 - 2x - 3) - 1/2 (2x + 4) (x - 4)$
 $= (x^2 - 2x - 3) - 1/2 [(x^2 + 1) - (x^2 - 2x - 3)] (x - 4)$
 $= -1/2 (x^2 + 1) (x - 4) + (x^2 - 2x - 3) \left(1 + \frac{x - 4}{2}\right)$

Así: $1 = +1/10 (4 - x) (x^2 + 1) - 1/10 (x - 2) (x^2 - 2x - 3),$

con lo cual: $a(x) = 1/10 (4 - x)$, $b(x) = -1/10 (x - 2)$.

13. Demostrar el Teorema 1.

Demostración: Sean

$$a(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$$

$$b(x) = b_0 + b_1x + \dots + b_mx^m, \text{ con } b_m \neq 0$$

- i) Si $a(x)$ es el polinomio nulo o si $gr(a(x)) < m = gr(b(x))$, entonces se tiene la representación:

$$a(x) = b(x) \cdot 0 + a(x)$$

- ii) Supongamos que $n = gr(a(x)) \geq gr(b(x)) = m$.
 Por inducción en n se tiene que:

- a) Para $n = 1$. Si $gr(b(x)) = 1$, entonces

$$a(x) = a_0 + a_1x = (b_0 + b_1x) \frac{a_1}{b_1} + a_0 - \frac{a_1 b_0}{b_1}$$

$$= b(x)q(x) + r(x)$$

$$\text{Con } gr(r(x)) = gr\left(a_0 - \frac{a_1 b_0}{b_1}\right) = 0 < 1$$

Si $gr(b(x)) = 0$, entonces:

$$a(x) = a_0 + a_1x = (b_0 \cdot \left(\frac{a_1}{b_0}x + \frac{a_0}{b_0}\right)) + 0$$

$$= b(x) \cdot q(x) + 0$$

$$\text{con } r(x) \equiv 0$$

- b) Supongamos que $\forall p(x) \in P_{n-1}$ se tiene el Algoritmo.

Sea $a(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$, con $a_n \neq 0$.

Entonces:

$$f(x) - \frac{a_n}{b_m}x^{n-m}b(x) := a_1(x) \in P_{n-1}$$

Por lo tanto $a_1(x) = b(x) \cdot q_1(x) + r(x)$ donde

$$r(x) \equiv 0 \vee gr(r(x)) < m.$$

$$\begin{aligned} \text{Por lo tanto } a(x) &= \frac{a_n}{b_m}x^{n-m}b(x) + a_1(x) \\ &= \left[\frac{a_n}{b_m}x^{n-m} + q_1(x) \right] b(x) + r(x) \\ &= q(x) \cdot b(x) + r(x) \\ \text{donde } gr(r(x)) &< m. \end{aligned}$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Sean $p_1(x) = 3x^5 + 5x^3 - 2x^2 + 2x - 1$

$$p_2(x) = 6x^6 - 3x^4 - 2x^3 + 6x^2 - 7$$

Calcular:

a) $(3x - 2) p_1(x) + 3p_2(x)$

b) $p_1(x) \cdot p_2(x)$

c) $(p_1(x) - p_2(x))(x - 1)$

2. Determinar las constantes reales a, b, c , tales que:

$$\frac{7x - 1}{(5x + 1)(x + 2)} = \frac{a}{5x + 1} + \frac{b}{x + 2} + \frac{c}{x}, \quad x \in \mathbb{R} - \{-2, -\frac{1}{5}, 0\}$$

3. Determinar las constantes reales p, q, r , tales que:

$$\frac{5x^2 - 8x - 17}{(x - 3)(x + 1)(x - 5)} = \frac{p}{3(x - 3)} + \frac{q}{x + 1} + \frac{r}{x - 5}$$

4. Determinar las constantes reales K, L, M, N , tales que:

$$\frac{1}{x^4 - x} = \frac{K}{x} + \frac{L}{x - 1} + \frac{Mx + N}{x^2 + x + 1},$$

con $x \in \mathbb{R} - \{0; 1\}$

5. En cada una de las siguientes ecuaciones compruebe, por división sintética, que el valor indicado para x_1 es raíz de la ecuación y determine las otras raíces reales (si existen).

a) $4x^3 + 3x^2 - 5x - 2 = 0, \quad x_1 = 1$

b) $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0, \quad x_1 = -2$

c) $2x^3 - 11x^2 + 17x - 6 = 0, \quad x_1 = 2$

d) $x^3 - 7x^2 + 13x - 3 = 0 \quad x_1 = 3$

e) $x^3 + 3x^2 - 2x - 4 = 0, \quad x_1 = -1$

f) $x^3 - 7x^2 + 12x - 10 = 0$, $x_1 = 5$

g) $x^3 + 3x^2 - 4 = 0$, $x_1 = -2$

6. Sea $p(x) = 12x^4 + 4x^3 - 23x^2 + x + 6$. Determine los ceros de $p(x)$:

a) en Z , b) en Q , c) en R

7. Se desea fabricar un envase de forma de paralelepípedo recto, tal que el ancho mida 2[cm] más que el alto y el largo mida 3[cm] más que el ancho y que tenga 1,040 [litros] de capacidad. Determine las dimensiones del envase.

8*. Sabiendo que $x_1 = \frac{1}{2}$ y $x_2 = -\frac{1}{2}$ son raíces de la ecuación:
 $4x^4 + ax^3 + bx^2 + 5x - 4 = 0$, determinar sus otras raíces.

9*. Sea $p(x) = 2x^5 + 10x^4 - 14x^3 - bx^2 + ax$. Si $p(1) = p(-5) = 0$, escribir $p(x)$ como producto de factores de primer grado.

10*. Comprobar que 3 es raíz múltiple del polinomio

$$q(x) = 3x^4 - 37x^3 + 147x^2 - 207x + 54.$$

11*. Del polinomio $p(x) = 2x^3 + ax^2 + bx - 8$ se sabe que es divisible por $x - 1$, en cambio, al dividirlo por $x - 2$, da resto 4. Determine los valores de a y b .

12*. Compruebe que si $a \in R$, existe $\lambda \in R$ tal que

$$x^4 + a^4 = (x^2 + \lambda x + a^2)(x^2 - \lambda x + a^2), \text{ y determine } \lambda.$$

13*. Aplicando el teorema del resto, compruebe que si $n \in N$ y $a \in R$, entonces ni $x - a$, ni $x + a$ son factores de $p_1(x) = x^{2n} + a^{2n}$. En cambio, $x - a$ es factor de $p_2 = x^{2n+1} - a^{2n+1}$ y $x + a$ es factor de $p_3 = x^{2n+1} + a^{2n+1}$. Determine para $p_2(x)$ y $p_3(x)$ el otro factor.

14**. ¿Para qué valores de a y n el polinomio $x^n - ax^{n-1} + ax - 1$ es divisible por $(x - 1)^2$?

15**. Si $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$ es un polinomio de grado n par, con $a_n > 0$ y $a_0 < 0$, compruebe que la ecuación $p(x) = 0$ tiene, a lo menos, una raíz real positiva y una raíz real negativa.

16. Determine las raíces racionales de las siguientes ecuaciones.

a) $5x^3 - 3x^2 - 55x + 33 = 0$

b) $3x^3 + 7x^2 - 10x + 4 = 0$

c) $x^4 + 2x^3 + 11x^2 - 2x - 3 = 0$

17*. Resuelva la ecuación $(9x^2 + 3 + 12x)^2 + 1 = -18x^2 - 24x - 6$.

18**. Obtenga un polinomio $p(x)$ con coeficientes enteros, del menor grado posible, tal que $p(\sqrt{5} - \sqrt{3}) = 0$ y $p(1 - \sqrt{2}) = 0$.

19*. Resuelva las siguientes inecuaciones:

a) $8x^3 - 12x^2 - 2x + 3 \leq 0$

b) $3x^3 - 2x^2 - 6x + 4 \geq 0$

c)* $x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 4x - 4 \leq 0$

d)* $\frac{2x - 3}{x^3 - 2x^2 - x + 2} < 0$

20. Demuestre el Teorema del Resto y el Teorema del Factor.

21. Demuestre que los únicos polinomios irreducibles sobre $R[x]$ son los polinomios lineales y los polinomios cuadráticos con discriminante negativo.

22. Determine los valores de λ para los cuales las ecuaciones:

$$\lambda x^3 - x^2 - x(\lambda + 1) = 0$$

$$\lambda x^2 - x - (\lambda + 1) = 0$$

tienen una raíz común y encuentre esta raíz.

23. Hallar el valor de x para el cual la fracción

$$\frac{x^3 - ax^2 + 19 - a - 4}{x^3 - (a + 1)x^2 + 23x - a - 7}$$

admite simplificación y obtenga el cociente.

24. Hallar a y b de modo que $p(x) = x^3 + ax^2 + 11x + 6$;
 $q(x) = x^3 + bx^2 + 14x + 8$ tengan un factor común de la forma $x^2 + px + q$.
25. Sea $p(x) = 2x^3 + bx^2 + cx + d$. Determine las constantes $b, c, d \in R$ de modo que:
- i) el resto al dividir $p(x)$ por x sea igual a $2 + b$
 - ii) el resto al dividir $p(x)$ por $x + 1$ sea igual a $b + d$
 - y iii) $x = 1$ sea un cero de $p(x)$
26. Al dividir cierto polinomio $p(x) \in R[x]$ por $x - 1$, el resto es a y al dividirlo por $x - 2$ el resto es b . Encuentre el resto al dividir $p(x)$ por $(x - 1)(x - 2)$.
27. Determine los valores de $k \in R$ para los cuales el polinomio
 $p(x) = 2k^2x^3 + 3kx^2 - 2$ es divisible por $x - 1$ y tiene sólo ceros reales.
28. Demuestre Teorema 6 y Teorema 7.
29. Si $p(x)$ es un polinomio irreducible sobre $R[x]$ y si $p(x)$ es divisor del producto $a(x) \cdot b(x)$ de dos polinomios sobre R , demuestre que $p(x)$ es divisor de $a(x)$ o $p(x)$ es divisor de $b(x)$.
30. Dadas las raíces r_1, r_2 y r_3 de la ecuación:

$$x^3 - px + q = 0,$$

construya una ecuación cúbica cuyas raíces sean

$$r_1^2, r_2^2, r_3^2$$

SOLUCIONES

1. a) $27x^6 - 6x^5 + 6x^4 - 22x^3 + 28x^2 - 7x - 19$
b) $18x^{11} + 21x^9 - 18x^8 + 15x^7 - 10x^6 + 7x^5 - 13x^4 - 21x^3 + 8x^2 - 14x + 7$
c) $-6x^7 + 9x^6 + 4x^4 - 15x^3 + 10x^2 + 4x - 6$
2. $a = \frac{-4}{3}, \quad b = \frac{5}{3}, \quad c = 0$
3. $p = -\frac{3}{2}, \quad q = -\frac{1}{6}, \quad r = \frac{17}{3}$
4. $K = -1, \quad L = \frac{1}{3}, \quad M = \frac{2}{3}, \quad N = \frac{1}{3}$
5. a) $\frac{-7 \pm \sqrt{17}}{8},$ b) 1 y 3, c) 1/2 y 3
d) $2 \pm \sqrt{3}$ e) $-1 \pm \sqrt{5}$ f) no existen
g) -2 y 1
6. a) $x = 1$
b) $x_1 = -\frac{3}{2} \quad x_2 = -\frac{1}{2} \quad x_3 = \frac{2}{3} \quad x_4 = 1$
c) $x_1 = -\frac{3}{2} \quad x_2 = -\frac{1}{2} \quad x_3 = \frac{2}{3} \quad x_4 = 1$
7. $Alto = 8[\text{cm}] \quad ancho = 10[\text{cm}], \quad largo = 13[\text{cm}]$
8. $x_3 = 1 \quad x_4 = 4$
9. $p(x) = 2x(x-1)(x-2)(x+3)(x+5)$
10. 3 es raíz doble de $q(x)$, donde $q(x) = (x-3)^2(3x^2 - 19x + 6)$
11. $a = -8 \quad b = 4$

12. $\lambda = a\sqrt{2}$

13.
$$x^{2n} + x^{2n-1}a + x^{2n-2}a^2 + \dots + a^{2n},$$
$$x^{2n} - x^{2n-1}a + x^{2n-2}a^2 - \dots + a^{2n}$$

14. $n \in N - \{1, 2\}, a = \frac{n}{n-2}$

16. a) $\frac{3}{5}$ b) no tiene, c) no tiene

17. $x = -\frac{2}{3}$ es raíz de multiplicidad 4.

18. $p(x) = x^6 - 2x^5 - 15x^4 + 32x^3 - 12x^2 - 8x + 4$

19. a) $x \in (-\infty, -1/2] \cup [1/2, 3/2]$

b) $x \in [-\sqrt{2}, 2/3] \cup [\sqrt{2}, +\infty)$

c) $x \in [-1, +1]$

d) $x \in (-1, +1) \cup (3/2, 2)$

22. $\lambda \neq 0$ y x_0 están dados por $x_0 = \frac{\lambda + 1}{\lambda}$

23. $a = 8; \quad \frac{x-4}{x-5}$

24. $a = 6 \quad b = 7$

25. $b = -1 \quad c = -2 \quad d = 1$

26. $r(x) = (b-a)x + 2a - b.$

27. $k = 1/2$

28. $x^3 + 2px^2 + p^2x - q^2 = 0$