

**Indicaciones:**

Todos los materiales a utilizar durante la prueba son de uso individual.  
 Dispone de 10 minutos para hacer preguntas sobre la redacción de los enunciados.  
 El tiempo total para resolver la prueba es de 100 minutos.  
 Justifique todas sus respuestas.  
 Sea claro y ordenado en sus desarrollos.  
 Cada pregunta vale 12 puntos

1. Sabiendo que  $\tan \frac{1}{3}$ , con  $\frac{3}{2}$  y que  $\cot \frac{\sqrt{5}}{7}$ , con  $2$ , determine el **valor exacto** de

$$\sin\left(\frac{\quad}{2}\right)$$

2. Demuestre la siguiente identidad, indicando restricciones:

$$\frac{\sin 8t}{\cos 8t} - \frac{\sin 4t}{\cos 4t} = \tan 2t$$

3. Hallar las soluciones en  $0; \pi/2$  de la ecuación trigonométrica:

$$(\sqrt{3} \sin 3x - \cos 3x - 1) \sec x - 3 \sec 2x - \sec x \sec 2x = 0$$

4. Un vehículo se dirige en línea recta desde una ciudad  $A$  a otra ciudad  $C$  ubicada a 80 Km. En su camino pasa por  $B$  a 20 Km. del punto de partida. Otro vehículo parte en línea recta de  $A$  a  $D$ , de modo que ambos caminos se separan por un ángulo de  $50^\circ$ . Si la distancia de  $D$  a  $B$  es de 40 Km., determine la distancia entre las ciudades  $D$  y  $C$ . (Aproxime al tercer decimal)

5. Resuelva la siguiente ecuación en los complejos:

$$\left( \frac{\sqrt{2}z}{\text{Cis}\left(\frac{3}{2}\right) - \text{Cis}} \right)^4 = \overline{2\sqrt{3}i - 2}$$

## Desarrollo

1. Sabiendo que  $\tan \frac{1}{3}$ , con  $\frac{3}{2}$  y que  $\cot \frac{\sqrt{5}}{7}$ , con  $2$ , determine el **valor exacto** de

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

Tenemos que  $\theta$  debe estar en el 2º cuadrante y  $\theta + \pi$  en el 3º cuadrante, por los signos de las funciones trigonométricas que conocemos. Luego sabemos que:

$$\tan \frac{1}{3} = \frac{|\sin \frac{1}{3}|}{|\cos \frac{1}{3}|} = \frac{1}{3} \approx \frac{2|\sin \frac{1}{3}|}{|\cos \frac{1}{3}|} = \frac{|\sin \frac{1}{3}|^2}{3|\sin \frac{1}{3}|^2} = 1$$

$$|\sin \theta| = 1/\sqrt{10} \quad |\cos \theta| = 3/\sqrt{10}$$

Como debe estar en el 2º cuadrante sin  $1/\sqrt{10}$  cos  $3/\sqrt{10}$

Además

$$\cot \frac{\sqrt{5}}{7} = \frac{|\cos \frac{\sqrt{5}}{7}|}{|\sin \frac{\sqrt{5}}{7}|} = \frac{\sqrt{5}}{7} \frac{|\sin \frac{\sqrt{5}}{7}|}{|\cos \frac{\sqrt{5}}{7}|} = \frac{\sqrt{5}}{7} \frac{|\sin \frac{\sqrt{5}}{7}|^2}{\left(\frac{\sqrt{5}}{7} |\sin \frac{\sqrt{5}}{7}|\right)^2} = 1$$

$$|\sin| = 7/\sqrt{54} \quad |\cos| = \sqrt{5}/\sqrt{54}$$

Como debe estar en el 3° cuadrante sin  $7/\sqrt{54}$  cos  $\sqrt{5}/\sqrt{54}$

Así

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{10}\right) = \cos\left(\frac{\sqrt{5}\pi}{54}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{\sqrt{10}}\right) = \sin\left(\frac{7\pi}{54}\right) = \sin\left(\frac{7}{6\sqrt{15}}\right)$$

- 2.** Demuestre la siguiente identidad, indicando restricciones:

$$\frac{\sin 8t}{\cos 8t} \cdot \frac{\sin 4t}{\cos 4t} = \tan 2t$$

Restricciones:

$$: \cos 8t \quad \cos 4t \quad 0 \quad \cos 2t \quad 0$$

$$2 \cos^2 4t \quad 1 \quad \cos 4t \quad 0 \quad \cos 2t \quad 0$$

$$2 \cos 4t \quad 1 \quad \cos 4t \quad 1 \quad 0 \quad \cos 2t \quad 0$$

$$\cos 4t \quad 1/2 \quad \cos 4t \quad 1 \quad \cos 2t \quad 0$$

$$4t \quad /3 \quad 2k \quad 4t \quad 5/3 \quad 2k \quad 4t \quad 2k \quad 1 \quad 2t \quad /2 \quad 2k$$

$$t \quad 1/12 \quad k/2 \quad t \quad 5/12 \quad k/2 \quad t \quad 2k-1/4 \quad t \quad 1/4 \quad k$$

$$\text{Rest} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / 12 \cdot k / 2; 5 / 12 \cdot k / 2; 2k - 1 / 4; 1/4 \cdot k : k \in \mathbb{Z}$$

Ahora, note que:

$$\frac{\sin 8t}{\cos 8t} \quad \frac{\sin 4t}{\cos 4t} \quad \frac{2 \sin 4t \cos 4t}{2 \cos^2 4t} \quad \frac{\sin 4t}{1 \cos 4t} \quad \frac{2 \cos 4t}{2 \cos 4t} \quad \frac{1 \sin 4t}{1 \cos 4t} \quad 1$$

$$\frac{2 \sin 2t \cos 2t}{2 \cos^2 2t} = \frac{\sin 2t}{\cos 2t} = \tan 2t$$

- 3.** Hallar las soluciones en  $0; \pi/2$  de la ecuación trigonométrica:

$$\begin{pmatrix} \sqrt{3} \sin 3x & \cos 3x & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sec x & 3 \sec 2x & \sec x \sec 2x & 0 \end{pmatrix}$$

Restricciones:

$$\cos x = 0 \quad \cos 2x = 0 \quad x = \pi/2 + k\pi \quad x = \pi/4 + k\pi/2$$

$$\text{Rest} : \mathbb{R} \quad \pi/2 + k\pi ; \pi/4 + k\pi/2 : k \in \mathbb{Z}$$

Así:

$$: \left( \sqrt{3} \sin 3x - \cos 3x - 1 \right) \sec x - 3 \sec 2x - \sec x \sec 2x = 0$$

$$\sqrt{3} \sin 3x - \cos 3x - 1 - \sec x - 3 \sec 2x - \sec x \sec 2x = 0$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \sin 3x - \frac{1}{2} \cos 3x - \frac{1}{2} - \left( \frac{1}{\cos x} - \frac{3}{\cos 2x} - \frac{1}{\cos x \cos 2x} \right) = 0$$

$$\sin 3x = \pi/6 \quad 1/2 \cos 2x = 3 \cos x - 1 = 0$$

$$3x = \pi/6 \quad \pi/6 + 2k\pi \quad 3x = \pi/6 + 5\pi/6 + 2k\pi \quad 2 \cos^2 x - 1 = 3 \cos x - 1 = 0$$

$$3x = 2k\pi \quad 3x = 2\pi/3 + 2k\pi \quad 2 \cos x = 3 \cos x = 0$$

$$x = 2k\pi/3 \quad x = 2\pi/9 + 2k\pi/3 \quad \cos x = 3/2 \quad \cos x = 0$$

Como  $\cos x = 0$  (por restricción) y  $\cos x = 3/2$ , entonces la única solución válida es  $S_x = \left\{ \frac{2\pi}{9} \right\}$

4. Un vehículo se dirige en línea recta desde una ciudad  $A$  a otra ciudad  $C$  ubicada a 80 Km. En su camino pasa por  $B$  a 20 Km. del punto de partida. Otro vehículo parte en línea recta de  $A$  a  $D$ , de modo que ambos caminos se separan por un ángulo de  $50^\circ$ . Si la distancia de  $D$  a  $B$  es de 40 Km., determine la distancia entre las ciudades  $D$  y  $C$ . (Aproxime al tercer decimal)

En el triángulo  $ABD$  usamos Teorema del seno y tenemos que:

$$\frac{\sin \angle ADB}{20} = \frac{\sin 50^\circ}{40} \quad \sin \angle ADB = \frac{\sin 50^\circ}{2} = 0.383 \quad \angle ADB = 22.52^\circ$$

Luego el ángulo  $DBC$  mide  $72.52^\circ$  y usando teorema del coseno tenemos que:

$$\text{med } \overline{DB} = \sqrt{40^2 + 60^2 - 2 \cdot 40 \cdot 60 \cdot \cos 72.52^\circ} = 61.304 \text{ Km.}$$

5. Resuelva la siguiente ecuación en los complejos:

$$: \left( \frac{\sqrt{2}z}{\text{Cis}(\frac{3}{2})} - \text{Cis} \right)^4 = \overline{2\sqrt{3}i} - 2$$

$$\frac{4z^4}{i - 1} = 4 - 2\sqrt{3}i - 2$$

$$\frac{4z^4}{(\sqrt{2} \text{cis } 5\pi/4)^4} = 4 \text{cis } 4\pi/3$$

$$z^4 = \text{cis } 4\pi/3 = 4 \text{cis } 5\pi/3$$

$$z^4 = 4 \text{cis } \pi/3$$

$$z_k = \sqrt{2} \text{cis} \left( \frac{\pi/3 + 2k\pi}{4} \right) \text{ con } k = 0, 1, 2, 3$$

$$z_0 = \sqrt{2} \text{cis } \pi/12 ; z_1 = \sqrt{2} \text{cis } 7\pi/12 ; z_2 = \sqrt{2} \text{cis } 13\pi/12 ; z_3 = \sqrt{2} \text{cis } 19\pi/12$$