

1° Prueba de Cátedra de Mat 116.

Universidad Católica de Valparaíso
Instituto de Matemáticas

Lunes 28 de abril, 2003

Indicaciones:

- Todos los materiales a utilizar durante la prueba son de uso individual.
- Dispone de 10 minutos para hacer preguntas sobre la comprensión de los ejercicios.
- El tiempo total para resolver la prueba es de 100 minutos.
- Justifique todas sus respuestas.
- Sea claro y ordenado en sus desarrollos.
- Entre las preguntas **4 y 5** se debe contestar **sólo una**.
- Cada preguntata vale 12 puntos

1. Determine el valor exacto (sin aproximaciones) del valor $\csc(\alpha + \beta)$, sabiendo que los ángulos α y β cumplen las condiciones siguientes:

$$\cot \alpha = \frac{5}{3}; \quad \pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi$$
$$\csc \beta = -\frac{3}{\sqrt{5}}; \quad \frac{3}{2}\pi < \beta < 2\pi$$

2. Pruebe la siguiente identidad trigonométrica, indicando su dominio:

$$\frac{1 - \tan \theta}{1 + \tan \theta} = \frac{1 - \sin(2\theta)}{\cos(2\theta)}$$

3. Resuelva la siguiente ecuación, en el intervalo $[-\pi; \pi]$:

$$\sqrt{3} (\cos(4x) \tan(2x) - \sin(2x) \tan(2x)) = \cos(4x) - \sin(2x)$$

4. Considerando las sinusoides

$$f(x) = \sin(2x) + \sqrt{3} \cos(2x)$$

$$g(x) = 1 + \cos(3x) \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \sin(3x) \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$$

determine si la amplitud, el período y la diferencia de fase de ambas curvas son o no iguales. Justifique.

5. Pruebe que:

$$\frac{\pi}{4} = 2 \arctan\left(\frac{1}{4}\right) + \arctan \frac{7}{23}$$

6. Un avión que se acerca desde el este a un aeropuerto se encuentra a 5 Km. de él en el momento en que un automóvil se acerca por el oeste al aeropuerto a 2 Km. de él. Sabiendo que el ángulo de depresión con que el avión observa al aeropuerto es de 45° , determine la distancia entre el avión y el automóvil.

Desarrollo

1. Determine el valor exacto (sin aproximaciones) del valor $\csc(\alpha + \beta)$, sabiendo que los ángulos α y β cumplen las condiciones siguientes:

$$\cot \alpha = \frac{5}{3}; \quad \pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi$$

$$\csc \beta = -\frac{3}{\sqrt{5}}; \quad \frac{3}{2}\pi < \beta < 2\pi$$

Si $\cot \alpha = \frac{5}{3} \Rightarrow \tan \alpha = \frac{3}{5} \Rightarrow |\sin \alpha| = \frac{3}{\sqrt{34}} \wedge |\cos \alpha| = \frac{5}{\sqrt{34}}$. Como $\pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi$,

$$\text{entonces } \sin \alpha = \frac{-3}{\sqrt{34}} \wedge \cos \alpha = \frac{-5}{\sqrt{34}}.$$

Además, si $\csc \beta = -\frac{3}{\sqrt{5}} \Rightarrow \sin \beta = -\frac{\sqrt{5}}{3} \Rightarrow |\cos \beta| = \frac{2}{3}$. Como $\frac{3}{2}\pi < \beta < 2\pi$, entonces

$$\cos \beta = \frac{2}{3}$$

Finalmente:

$$\csc(\alpha + \beta) = \frac{1}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{1}{\sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha} = \frac{1}{\left(\frac{-3}{\sqrt{34}}\right)\left(\frac{2}{3}\right) + \left(\frac{-\sqrt{5}}{3}\right)\left(\frac{-5}{\sqrt{34}}\right)} = \frac{3\sqrt{34}}{5\sqrt{5} - 6}$$

2. Pruebe la siguiente identidad trigonométrica, indicando su dominio:

$$\frac{1 - \tan \theta}{1 + \tan \theta} = \frac{1 - \sin(2\theta)}{\cos(2\theta)}$$

Restricciones:

$$\cos(\theta) \neq 0 \wedge 1 + \tan(\theta) \neq 0 \wedge \cos(2\theta) \neq 0 \Rightarrow$$

$$\theta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \wedge \theta \neq \frac{3}{4}\pi + k\pi \wedge \theta \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} : \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

Luego, tenemos que:

$$\begin{aligned} \frac{1 - \tan \theta}{1 + \tan \theta} &= \frac{1 - \frac{\sin \theta}{\cos \theta}}{1 + \frac{\sin \theta}{\cos \theta}} = \frac{\frac{\cos \theta - \sin \theta}{\cos \theta}}{\frac{\cos \theta + \sin \theta}{\cos \theta}} = \frac{\cos \theta - \sin \theta}{\cos \theta + \sin \theta} \\ &= \frac{\cos \theta - \sin \theta}{\cos \theta + \sin \theta} \cdot \frac{\cos \theta - \sin \theta}{\cos \theta - \sin \theta} = \frac{\cos^2 \theta - 2 \sin \theta \cos \theta + \sin^2 \theta}{\cos^2 \theta - \sin^2 \theta} \\ &= \frac{1 - 2 \sin \theta \cos \theta}{\cos(2\theta)} = \frac{1 - \sin(2\theta)}{\cos(2\theta)} \end{aligned}$$

3. Resuelva la siguiente ecuación, en el intervalo $[-\pi; \pi]$:

$$\sqrt{3} (\cos(4x) \tan(2x) - \sin(2x) \tan(2x)) = \cos(4x) - \sin(2x)$$

Restricciones:

$$\cos(2x) \neq 0 \Rightarrow x \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} : \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

Luego, tenemos que:

$$\sqrt{3} (\cos(4x) \tan(2x) - \sin(2x) \tan(2x)) = \cos(4x) - \sin(2x) \Rightarrow$$

$$\sqrt{3} \tan(2x)(\cos(4x) - \sin(2x)) - (\cos(4x) - \sin(2x)) = 0 \Rightarrow$$

$$(\sqrt{3} \tan(2x) - 1)(\cos(4x) - \sin(2x)) = 0 \Rightarrow$$

$$\tan(2x) = \frac{1}{\sqrt{3}} \vee (1 - 2 \sin^2(2x) - \sin(2x)) = 0 \Rightarrow$$

$$\tan(2x) = \frac{1}{\sqrt{3}} \vee (2 \sin^2(2x) + \sin(2x) - 1) = 0 \Rightarrow$$

$$\tan(2x) = \frac{1}{\sqrt{3}} \vee (2 \sin(2x) - 1)(\sin(2x) + 1) = 0 \Rightarrow$$

$$\tan(2x) = \frac{1}{\sqrt{3}} \vee \sin(2x) = \frac{1}{2} \vee \sin(2x) = -1 \Rightarrow$$

$$2x = \frac{\pi}{6} + k\pi \vee 2x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee 2x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \vee 2x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \Rightarrow$$

$$x = \frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{2} \vee x = \frac{\pi}{12} + k\pi \vee x = \frac{5\pi}{12} + k\pi \vee x = \frac{3\pi}{4} + k\pi \Rightarrow$$

$$S_x = \left\{ \frac{-11}{12}\pi; \frac{-7}{12}\pi; \frac{-5}{12}\pi; \frac{1}{12}\pi; \frac{5}{12}\pi; \frac{7}{12}\pi \right\}$$

4. Considerando las sinusoides

$$f(x) = \sin(2x) + \sqrt{3} \cos(2x)$$

$$g(x) = 1 + \cos(3x) \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \sin(3x) \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$$

determine si la amplitud, el período y la diferencia de fase de ambas curvas son o no iguales. Justifique.

Para $f(x)$, se tiene que

$$f(x) = \sin(2x) + \sqrt{3} \cos(2x) \Rightarrow$$

$$\frac{f(x)}{2} = \frac{1}{2} \sin(2x) + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos(2x) \Rightarrow$$

$$\frac{f(x)}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \sin(2x) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \cos(2x) \Rightarrow$$

$$\frac{f(x)}{2} = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow$$

$$f(x) = 2 \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$$

donde encontramos amplitud: 2; período: π y diferencia de fase: $-\frac{\pi}{6}$

Para $g(x)$, en cambio

$$g(x) = 1 + \cos(3x) \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \sin(3x) \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow$$

$$g(x) = 1 + \cos\left(3x - \left(x - \frac{\pi}{3}\right)\right) \Rightarrow$$

$$g(x) = 1 + \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$$

Por lo que la amplitud es 1, el período sigue siendo π y la diferencia de fase: $-\frac{\pi}{6}$. Lo único que difiere es la amplitud.

5. Pruebe que:

$$\frac{\pi}{4} = 2 \arctan\left(\frac{1}{4}\right) + \arctan \frac{7}{23}$$

En efecto, aplicando la función tangente a ambos lados de la igualdad y aprovechando la fórmula:

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \cdot \tan \beta}$$

obtenemos que:

$$\begin{aligned} \tan\left(2 \arctan\left(\frac{1}{4}\right) + \arctan \frac{7}{23}\right) &= \frac{\tan\left(2 \arctan\left(\frac{1}{4}\right)\right) + \tan\left(\arctan \frac{7}{23}\right)}{1 - \tan\left(2 \arctan\left(\frac{1}{4}\right)\right) \cdot \tan\left(\arctan \frac{7}{23}\right)} \\ &= \frac{\frac{2 \tan\left(\arctan\left(\frac{1}{4}\right)\right)}{1 - \tan^2\left(\arctan\left(\frac{1}{4}\right)\right)} + \frac{7}{23}}{1 - \frac{2 \tan\left(\arctan\left(\frac{1}{4}\right)\right)}{1 - \tan^2\left(\arctan\left(\frac{1}{4}\right)\right)} \cdot \frac{7}{23}} \\ &= \frac{\frac{\frac{1}{2}}{1 - \left(\frac{1}{16}\right)} + \frac{7}{23}}{1 - \frac{\frac{1}{2}}{1 - \left(\frac{1}{16}\right)} \cdot \frac{7}{23}} \\ &= \frac{\frac{8}{15} + \frac{7}{23}}{1 - \frac{8}{15} \cdot \frac{7}{23}} \\ &= 1 = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

6. Un avión que se acerca desde el este a un aeropuerto se encuentra a 5 Km. de él en el momento en que un automovil se acerca por el oeste al aeropuerto a 2 Km. de él. Sabiendo que el ángulo de depresión con que el avión observa al aeropuerto es de 45° , determine la distancia entre el avión y el automovil.

Si el ángulo de depresión con que el avión observa al aeropuerto es de 45° , el ángulo que se forman la distancia entre el aeropuerto y el avión con la distancia entre el aeropuerto y el automovil es de 135° , luego, utilizando el teorema del coseno se tiene que la distancia x entre el avión y el automovil, corresponde a:

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{2^2 + 5^2 - 2(2)(5) \cos(135^\circ)} \\ &= \sqrt{29 + 10\sqrt{2}} \approx 6.5683 \end{aligned}$$

Luego esta distancia corresponde aproximadamente a 6.57 metros.