

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE VALPARAISO  
 INSTITUTO DE MATEMATICA  
 (Viernes 20 de Mayo 2005)

Observaciones :

- 1.-Dispone de 90 minutos para contestar
- 2.-No se permite el uso de calculadora
- 3.-No se aceptan consultas
- 4.-Cada pregunta tiene 15 puntos.

PAUTA

TERCER CERTAMEN MAT 116

PREGUNTA 1.-

Dada la sucesión definida por recurrencia

$$a_1 = 3$$

$$a_{n+1} = a_n + 2n, n \in \mathbb{N}$$

- 1.1.- Determine los 5 primeros términos de la sucesión y conjeture una fórmula NO recursiva para  $a_n, n \in \mathbb{N}$
- 1.2.- Demuestre la fórmula obtenida en (a) .
- 1.3.- Determine el valor de

$$\sum_{k=11}^{60} a_k \quad ? \quad \sum_{k=10}^{60} a_k$$

RESPUESTA :

1.1.- (5 puntos)

$$a_1 = 3 = 1 \cdot 2 + 3$$

$$a_2 = a_1 + 2 \cdot 1 = 3 + 2 = 5 = 2 \cdot 2 + 3$$

$$a_3 = a_2 + 2 \cdot 2 = 5 + 4 = 9 = 3 \cdot 2 + 3$$

$$a_4 = a_3 + 2 \cdot 3 = 9 + 6 = 15 = 4 \cdot 3 + 3$$

$$a_5 = a_4 + 2 \cdot 4 = 15 + 8 = 23 = 5 \cdot 4 + 3$$

$$a_n = n(n+1) + 3$$

1.2.- (5 puntos) P.D.  $P_1$  :  $a_1 = 1 \cdot 2 + 3 = 3$  lo que corresponde al primer término de la sucesión definida por recurrencia.

Suponemos válido  $P_n$  :  $a_n = n(n+1) + 3, n \in \mathbb{N}$  (Hipótesis)

P.D.  $P_{n+1}$  :  $a_{n+1} = (n+1)(n+2) + 3, n \in \mathbb{N}$  (Tesis)

DEM:  $a_{n+1} = a_n + 2n$ , definición por recurrencia

$$a_{n+1} = n(n+1) + 3 + 2n, \text{ por hipótesis}$$

$$a_{n+1} = n(n+1) + 1 + 2n + 3$$

$$a_{n+1} = (n+1)(n+2) + 3$$

Así  $P_n \Rightarrow P_{n+1}, n \in \mathbb{N}$

$P_n$  :  $a_n = n(n+1) + 3$  es verdadera para todo natural.

1.3.- (5 puntos)

$$\begin{aligned}
 & \sum_{k=11}^{60} a_k > \sum_{k=10}^{60} a_{k+1} = \\
 & \left( \sum_{k=10}^{60} a_k > \sum_{k=10}^{60} a_{k+1} \right) > a_{10} = \\
 & \sum_{k=10}^{60} a_k > \sum_{k=10}^{60} a_{k+1} > a_{10} = \\
 & 60 \cdot 69 + 3 > 59 \cdot 68 + 3 > 58 \cdot 69 + 3 = 3375
 \end{aligned}$$

PREGUNTA 2.-

En el desarrollo de

$$x^3 \left( \sqrt[5]{x^2} + \frac{1}{x^3} \right)^{50}$$

determine, si existe:

2.1.- El coeficiente de  $x^6$

2.2.- El término independiente de  $x$

RESPUESTA :

2.1.- (6 puntos)

$$\begin{aligned}
 x^3 \left( \sqrt[5]{x^2} + \frac{1}{x^3} \right)^{50} &= x^3 \sum_{k=0}^{50} \binom{50}{k} \left( \sqrt[5]{x^2} \right)^{50-k} \left( \frac{1}{x^3} \right)^k \\
 &= \sum_{k=0}^{50} \binom{50}{k} \left( \sqrt[5]{x^2} \right)^{50-k} \frac{1}{x^{3k}} \\
 &= \sum_{k=0}^{50} \binom{50}{k} \frac{1}{x^{3k}} x^{\frac{100-2k}{5}} \\
 x^{\frac{100-2k}{5}-3k} &= x^6 \\
 \frac{100-2k}{5}-3k &= 6 \text{ Luego } k = 5
 \end{aligned}$$

El coeficiente de  $x^6$  es  $\binom{50}{5} \cdot 1$

2.2.- (9 puntos)

$$\begin{aligned}
 x^{\frac{100-2k}{5}-3k} &= x^0 \\
 \frac{100-2k}{5}-3k &= 0 \\
 k &= \frac{115}{17} \notin \mathbb{Z}
 \end{aligned}$$

No existe el término independiente de  $x$

PREGUNTA 3.-

3.1.-La suma de los  $n$  términos de una P.A. es  $n^2 + 7n$ ,  $n \in \mathbb{N}$

Determine el décimo término de dicha P.A.

3.2.-Sea  $t_n$ , el  $n$ -ésimo término de la P.A., no constante, de primer término 1.

Se sabe que  $t_2, t_{10}, t_{34}$  están en P.G.

a) Determine la diferencia de la P.A.

b) Indique sus 5 primeros términos.

RESPUESTA :

3.1.- (5 puntos) Como la suma de los 10 primeros términos menos la suma de los 9 primeros términos, es el valor del décimo término, se tiene que :

$$t_{10} = 10^2 + 7 \cdot 10 = 9^2 + 7 \cdot 9 = 26$$

3.2.-

a)(5 puntos)

Como  $t_2, t_{10}, t_{34}$  están en P.G.

$$\frac{1 + 33d}{1 + 9d} = \frac{1 + 9d}{1 + d}$$

$$(1 + 33d)(1 + d) = (1 + 9d)^2$$

$$48d^2 - 16d = 0$$

$$3d^2 - d = 0$$

$$d(3d - 1) = 0$$

$$d = 0 \cup d = \frac{1}{3}$$

Como la P.A. no es constante,  $d = \frac{1}{3}$

b) (5 puntos)  $1, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}, 2, \frac{7}{3}$

PREGUNTA 4.-

En un curso de 40 personas, 25 alumnos son mujeres.

Se quiere formar una directiva con 1 presidente, 2 secretarios y 1 tesorero.

Determine de cuántas maneras se puede formar la directiva si :

a) El tesorero debe ser mujer.

b) El presidente debe ser mujer y al menos uno de los secretarios debe ser hombre.

RESPUESTA :

a) (7 puntos)  $C_1^{25} \cdot C_2^{39} \cdot C_1^{37} = {}_1^{25}P_1 \cdot {}_2^{39}P_2 \cdot {}_1^{37}P_1$

b) (8 puntos)  $C_1^{25} \cdot C_1^{15} \cdot C_1^{24} \cdot C_1^{37} + C_1^{25} \cdot C_2^{15} \cdot C_1^{37} =$   
 ${}_1^{25}P_1 \cdot {}_1^{15}P_1 \cdot {}_1^{24}P_1 \cdot {}_1^{37}P_1 + {}_1^{25}P_1 \cdot {}_2^{15}P_2 \cdot {}_1^{37}P_1$