

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE VALPARAISO

INSTITUTO DE MATEMATICA

(Viernes 24 de Junio 2005)

OBSERVACIONES :

1.-Dispone de 90 minutos para contestar

2.-No se aceptan consultas

3.-Cada pregunta tiene 15 puntos

4.-No se permite el uso de calculadora

PAUTA

CUARTO CERTAMEN MAT 116

PREGUNTA 1.-

Factorice en $\mathbb{R}[X]$ el polinomio

$$P(X) = X^6 - 2X^4 + X^2 + 2$$

si se sabe que $P(\sqrt{2}) = 0$.

Realice lo mismo en $\mathbb{C}[X]$.

RESPUESTA :

Como $P(X)$ es $\mathbb{R}[X]$, $\sqrt{2}$, $-\sqrt{2}$ son raíces de $P(X)$

Así $P(X)$ es divisible por $(X + \sqrt{2})(X - \sqrt{2}) = X^2 - 2$

Dividiendo los polinomios

$$X^6 - 2X^4 + X^2 + 2 : X^2 - 2 = X^4 + 1$$

$$\frac{X^6 - 2X^4}{X^2 - 2}$$

$$\frac{X^2 + 2}{X^2 - 2}$$

$$\frac{X^2 + 2}{X^2 - 2}$$

$$0$$

$$\text{Luego } P(X) = (X^2 - 2)(X^4 + 1)$$

$$\text{Factorización en } \mathbb{C}[X] : (X + \sqrt{2})(X - \sqrt{2})(X^2 + 1)(X + i)(X - i)$$

$$\text{Factorización en } \mathbb{R}[X] : (X + \sqrt{2})(X - \sqrt{2})(X^2 + 1)(X^2 + 1)$$

PREGUNTA 2.-

Descomponga el siguiente cociente usando el método de fracciones parciales, sin calcular las constantes :

$$\frac{X^4 + 4X^3 + 5X^2 + 3X + 3}{X^4 + 2X^3 + X^2 + 2X + 2}$$

RESPUESTA :

$$X^4 + 4X^3 + 5X^2 + 3X + 3 : X^4 + 2X^3 + X^2 + 2X + 2 = 1$$

$$\frac{X^4 + 2X^3 + X^2 + 2X + 2}{X^4 + 2X^3 + X^2 + 2X + 2}$$

$$2X^3 + 4X^2 + 5X + 1$$

Luego

$$X^4 + 4X^3 + 5X^2 + 3X + 3 = 1(X^4 + 2X^3 + X^2 + 2X + 2) + 2X^3 + 4X^2 + 5X + 1$$

$$\frac{X^4 + 4X^3 + 5X^2 + 3X + 3}{X^4 + 2X^3 + X^2 + 2X + 2} = 1 + \frac{2X^3 + 4X^2 + 5X + 1}{X^4 + 2X^3 + X^2 + 2X + 2}$$

$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & 2 & 1 & -2 & -2 \\ \hline 1 & 1 & 3 & 4 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 2 & 0 & \end{array}$$

$$x^4 + 2x^3 + x^2 - 2x - 2 = (x^2 + 1)(x^2 + 2x + 2) - (x^2 + 2x + 2) + 1$$

$$\frac{x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 3x - 3}{x^4 + 2x^3 + x^2 - 2x - 2} = 1 + \frac{2x^3 + 4x^2 + 5x - 1}{x^4 + 2x^3 + x^2 - 2x - 2} = 1 + \frac{2x^3 + 4x^2 + 5x - 1}{(x^2 + 1)(x^2 + 2x + 2) - (x^2 + 2x + 2) + 1}$$

La descomposición es:

$$1 + \frac{A}{x^2 + 1} + \frac{B}{x^2 + 2x + 2} + \frac{Cx + D}{x^2 + 2x + 2}$$

PREGUNTA 3.-

Sea π el plano $ax + y + bz = 2$ y L la recta de ecuación

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{2}.$$

Determine $a, b \in \mathbb{R}$, sabiendo que simultáneamente se cumple:

i) $L \subset \pi$

ii) $\pi \perp L$

RESPUESTA :

Tenemos que $\vec{u} = (3, 1, 2)$ es el vector director de L

$N = (a, 1, b)$ es el vector normal de π

Como $L \subset \pi$

$$\vec{u} \cdot N = 0$$

$$(3, 1, 2) \cdot (a, 1, b) = 0$$

$$3a + 2b = -1$$

Por otro lado $\pi \perp L$, luego $a + 1 + b = 2$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Resolviendo el sistema} \\ 3a + 2b = -1 \\ a + b = 1 \end{array} \right\}$$

obtenemos que $a = -3, b = 4$

PREGUNTA 4.-

Considere los planos $\pi_1 : 2x - y + z = 1$ y $\pi_2 : x - 3y + z = 2$

Determine la ecuación del plano π que contiene al punto $P(1, 2, 1)$

tal que $\pi \perp \pi_1$ y $\pi \perp \pi_2$

RESPUESTA :

Vectores directores de π , $N_1 = (2, -1, 1)$ y $N_2 = (1, -3, 1)$

$$\text{Vector normal de } \pi, N = N_1 \times N_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = (2, 1, 5)$$

Ecuación de π , $2x - y + 5z + d = 0$

Como $P(1, 2, 1) \in \pi$, $2 - 2 + 5 + d = 0$

De donde $d = -9$

Ecuación del plano pedido, $\pi : 2x - y + 5z - 9 = 0$