

AUTOEVALUACION : NUMEROS NATURALES

SOLUCION :

1.- Dada la sucesión definida por recurrencia :

$$a_1 = 1$$

$$a_{n+1} = 2a_n + 2, - n \geq 1, n \in \mathbb{N}$$

- Calcule los 5 primeros términos de la sucesión.
- Determine una fórmula NO RECURSIVA para a_n .
- Demuestre la fórmula obtenida en (b) por inducción.
- Calcule

$$100$$

$$> a_k$$

$$k=2$$

RESPUESTAS :

a)

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = 2a_1 + 2 = 2 + 2 = 4$$

$$a_3 = 2a_2 + 2 = 8 + 2 = 10$$

$$a_4 = 2a_3 + 2 = 20 + 2 = 22$$

$$a_5 = 2a_4 + 2 = 44 + 2 = 46$$

b)

$$a_1 = 1 = 3 \cdot 2^0 - 2$$

$$a_2 = 2a_1 + 2 = 2 + 2 = 4 = 3 \cdot 2^1 - 2$$

$$a_3 = 2a_2 + 2 = 8 + 2 = 10 = 3 \cdot 2^2 - 2$$

$$a_4 = 2a_3 + 2 = 20 + 2 = 22 = 3 \cdot 2^3 - 2$$

$$a_5 = 2a_4 + 2 = 44 + 2 = 46 = 3 \cdot 2^4 - 2$$

$$a_n = 3 \cdot 2^{n-1} - 2$$

c) P_1 : $a_1 = 3 \cdot 2^{1-1} - 2 = 3 - 2 = 1$ lo que corresponde al primer término de la sucesión definida por recurrencia.

Suponemos verdadero P_n : $a_n = 3 \cdot 2^{n-1} - 2, - n \in \mathbb{N}$ (HIPOTESIS)

P.D. P_{n+1} : $a_{n+1} = 3 \cdot 2^n - 2, - n \in \mathbb{N}$ (TESIS)

DEM: $a_{n+1} = 2a_n + 2$. Por definición de la sucesión por recurrencia.

Luego $a_{n+1} = 2a_n + 2 = 2(3 \cdot 2^{n-1} - 2) + 2$. Por Hipótesis.

$$\text{Así } a_{n+1} = 3 \cdot 2^n - 4 + 2 = 3 \cdot 2^n - 2$$

Por lo tanto se cumple $P_{n+1}, - n \in \mathbb{N}$

Como $P_1 \Rightarrow P_{n+1}, - n \in \mathbb{N}$

Tenemos que P_n : $a_n = 3 \cdot 2^{n-1} - 2, - n \in \mathbb{N}$ es verdadera.

d)

$$\begin{aligned} & \sum_{k=2}^{100} a_k = \sum_{k=2}^{100} \frac{3 \cdot 2^{k-1}}{2^k} = \sum_{k=2}^{100} \frac{3}{2} = \frac{3}{2} \cdot 99 = 148.5 \\ & \frac{3}{2} \cdot 6 \cdot \frac{2^{100} - 1}{2} = 9 \cdot (2^{100} - 1) \end{aligned}$$

2.- Demuestre por inducción :

$$P(n) = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}, \quad n \in \mathbb{N}$$

RESPUESTA :

$$P(1) : \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{1}{6} = \frac{1}{6} \quad (\text{La fórmula corresponde al primer sumando})$$

$$\text{Suponemos válido } P(n) : \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}, \quad n \in \mathbb{N}$$

P.D. $P(n+1)$:

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{(n+1)(n+4)}{4(n+2)(n+3)}, \quad n \in \mathbb{N}$$

DEM:

$$\begin{aligned} & \underbrace{\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)}}_{\frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} = \\ & \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} = \\ & \frac{1}{(n+1)(n+2)} \left(\frac{n(n+3)}{4} + \frac{1}{n+3} \right) = \\ & \frac{1}{(n+1)(n+2)} \left(\frac{n(n+3)^2 + 4}{4(n+3)} \right) = \\ & \frac{1}{(n+1)(n+2)} \cdot \frac{n^3 + 6n^2 + 9n + 4}{4(n+3)} = \\ & \frac{1}{(n+1)(n+2)} \cdot \frac{n^3 + 2n^2 + n + 4n^2 + 8n + 4}{4(n+3)} = \\ & \frac{1}{(n+1)(n+2)} \cdot \frac{n^3 + 2n^2 + 2n + 1 + 4n^2 + 2n + 1}{4(n+3)} = \\ & \frac{1}{(n+1)(n+2)} \cdot \frac{n^3 + 6n^2 + 4n + 2}{4(n+3)} = \\ & \frac{1}{(n+1)(n+2)} \cdot \frac{(n+1)(n^2 + 5n + 2) + 1}{4(n+3)} = \\ & \frac{1}{(n+1)(n+2)} \cdot \frac{(n+1)(n+2) + 1}{4(n+3)} = \frac{(n+1)(n+3)}{4(n+2)(n+3)} \end{aligned}$$

Luego $P(n+1)$ es verdadera - $n \in \mathbb{N}$

Como $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ tenemos que

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}, \quad n \in \mathbb{N}$$

es verdadera.

3.- En una P.A. (no constante) se sabe que el primer término es 2 y que los términos de lugares segundo, quinto y décimo cuarto forman una P.G. Determine:

a) La razón de la P.G.

b) La suma de los 20 primeros términos de la P.A.

RESPUESTA:

$$a = 2$$

$$a_2 = 2 + d, a_5 = 2 + 4d, a_{14} = 2 + 13d, \text{ términos en P.G.}$$

Luego

$$\begin{aligned} \frac{2 + 13d}{2 + 4d} &= \frac{2 + 4d}{2 + d} \\ (2 + 13d)(2 + d) &= (2 + 4d)^2 \\ 4 + 28d + 13d^2 &= 4 + 16d + 16d^2 \\ 3d^2 - 12d &= 0 \\ d^2 - 4d &= 0 \\ d(d - 4) &= 0 \end{aligned}$$

Así $d = 0$ o bien $d = 4$

Como la P.A. no es constante, $d \neq 0$

Con lo cual $d = 4$

a) La razón de la P.G. es $\frac{2+4d}{2+d} = \frac{2+16}{2+4} = 3$

b) La suma de los 20 primeros términos de la P.A. es :

$$S_{20} = \frac{20}{2}(4 + 19 \cdot 64) = 40 + 760 = 800$$

4.- En una carrera se fijan los premios de modo que cada jinete reciba \$45.000 menos que el anterior.

El que ganó la carrera recibió \$360.000 y los demás en suma \$990.000. ¿Cuántos eran los jinetes y cuánto recibió el que llegó último?

RESPUESTA :

Ganador=\$360000

Segundo lugar=\$315000

Tercer lugar=\$270000

Cuarto lugar=\$225000

Quinto lugar=\$180000

Pero la suma de éstas últimas cuatro cantidades corresponde a \$990000

Así los jinetes eran 5 y el último recibió \$180000

5.- Determine el coeficiente de x^n en el desarrollo de

$$(1 + x + x^2)^{n+1}$$

RESPUESTA:

$$\begin{aligned}
 & \text{Yl } ? x + x^2 \text{ p } \text{Yl } + x \text{ p }^{2n+1} = \\
 & \text{Yl } ? x + x^2 \text{ p } > \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} \text{Yl } \text{p}^{2n+1-k} x^k = \\
 & > \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} \text{Yl } ? x + x^2 \text{ p } x^k = \\
 & > \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} \text{Yl } x^k ? x^{k+1} + x^{k+2} \text{ p } =
 \end{aligned}$$

Como se nos pide el coeficiente de x^n resolvemos , por separado ,
 $x^k = x^n$, $x^{k+1} = x^n$, $x^{k+2} = x^n$ de donde obtenemos
 $k = n$, $k = n - 1$, $k = n - 2$
 Así el coeficiente de x^n es:

$$\binom{2n+1}{n} + \binom{2n+1}{n-1} + \binom{2n+1}{n-2}$$

6.- En una caja se tienen 6 esferas y 10 cubos, todos de distinto color. Determine de cuántas maneras se pueden sacar :

- una esfera y un cubo
- 5 de éstos elementos de modo que haya exactamente 3 cubos en cada selección.
- 4 de éstos elementos de modo que haya a lo mas 3 cubos en cada selección.

RESPUESTA :

a) $\binom{6}{1} \binom{10}{1}$

b) $\binom{10}{3} \binom{6}{2}$

c) Primer caso : sin cubos $\binom{6}{4}$

Segundo caso : 1 cubo $\binom{10}{1} \binom{6}{3}$

Tercer caso : 2 cubos $\binom{10}{2} \binom{6}{2}$

Cuarto caso : 3 cubos $\binom{10}{3} \binom{6}{1}$