

CEROS REALES DE POLINOMIOS

Teorema de Ceros Racionales

Si el polinomio $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ tiene coeficientes enteros, entonces cada cero racional de P es de la forma:

$$\frac{p}{q}$$

donde p es un factor del coeficiente constante a_0

y q es un factor del coeficiente principal a_n

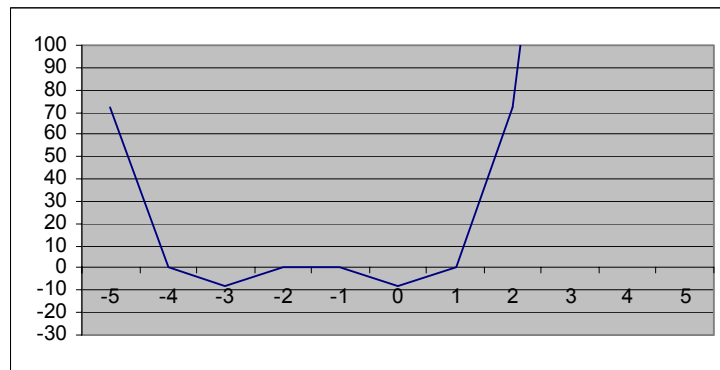
Ejemplo:

Factorizar el siguiente polinomio: $P(x) = 2x^4 - 7x^3 + 3x^2 + 8x - 4$

Ejemplo:

Hallar los ceros de $P(x) = x^4 + 6x^3 + 7x^2 - 6x - 8$ y graficar P(x)

x	P(x)
-5	72
-4	0
-3	-8
-2	0
-1	0
0	-8
1	0
2	72
3	280
4	720
5	1512



Regla de Signos de Descartes

Si P es un polinomio con coeficientes reales:

1. El número de ceros reales positivos de $P(x)$ es igual al número de variaciones de signo en $P(x)$ o es dos valores antes al número de variaciones hallado.
2. El número de ceros reales negativos de $P(x)$ es igual al número de variaciones de signo en $P(-x)$ o es dos valores antes al número de variaciones hallado.

Ejemplo:

Use la regla de signos de Descartes para determinar los posibles números reales positivos y negativos del polinomio:

$$P(x) = 2x^6 + 5x^4 - x^3 - 5x - 1$$

Limite Superior e Inferior para las Raíces

Si P es un polinomio con coeficientes reales

1. Si se divide $P(x)$ por $x-b$ (con $b>0$) usando división sintética, y si la fila que contiene al cociente y residuo tiene entradas no negativas, entonces b es un límite superior para los ceros reales de P .
2. Si se divide $P(x)$ por $x-a$ (con $a<0$) usando división sintética, y si la fila que contiene al cociente y residuo tiene entradas que son alternadamente no positivas y no negativas, entonces a es un límite inferior para los ceros reales de P .

Ejemplo:

Mostrar que todos los ceros reales de el polinomio $P(x) = 8x^3 + 10x^2 - 39x + 9$, están entre -3 y 2.

Mostrar que todos los ceros reales de el polinomio $P(x) = x^4 - 2x^3 - 9x^2 + 2x + 8$, están entre -3 y 1.

Ejemplo:

Factorizar completamente el polinomio:

$$P(x) = x^5 - 7x^4 + 9x^3 + 23x^2 - 50x + 24$$

Usando álgebra y dispositivos gráficos para resolver ecuaciones polinomiales

Hallar todas las soluciones reales de la siguiente ecuación, correctas lo más cerca posible al décimo

$$P(x) = 3x^4 + 4x^3 - 7x^2 - 2x - 3$$

CEROS COMPLEJOS Y EL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL ALGEBRA

Teorema Fundamental del Álgebra

Cada Polinomio

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \quad (n \geq 1, a_n \neq 0)$$

con coeficientes complejos tiene al menos un cero complejo.

Debido a que todo número real es también complejo, el teorema se aplica a polinomios con coeficientes reales.

Teorema de la Factorización Completa

Si $P(x)$ es un polinomio de grado $n > 0$, entonces allí existe numero complejos a, c_1, c_2, \dots, c_n tal que

$$P(x) = a(x - c_1)(x - c_2) \cdots (x - c_n)$$

Ejemplo:

Hallar las soluciones de las ecuaciones:

(a) $x^4 - 2x^2 - 15 = 0$

(b) $x^6 - 64$

Ceros y sus Multiplicidades

En el teorema de factorización completa, los números c_1, c_2, \dots, c_n son los ceros de P . Esos ceros no necesitan ser diferentes. Si el factor $x - c$ aparece k veces en la factorización de $P(x)$, entonces se dice que c es un cero de multiplicidad k .

Teorema de Ceros

Cada polinomio de grado $n \geq 1$ tiene exactamente n ceros, proporcionado por un cero de multiplicidad k que es contado k veces.

Ejemplo:

Hallar la factorización completa y todos los ceros de el polinomio

$$P(x) = x^5 + 6x^3 + 9x$$

Ejemplo:

Hallar un polinomio que satisfaga la siguiente descripción

- (a) P tiene grado 3 y ceros $3, 2i$ y $-2i$
- (b) S tiene grado 4 y ceros -1 y 0 y -1 es de multiplicidad 3
- (c) R tiene grado 4 y ceros $1 - 2i$ y 1 , con 1 de multiplicidad 2

Ejemplo

Hallar todos los ceros de $P(x) = x^4 - 2x^3 - 2x^2 - 2x - 3$

Teorema de la Conjugada de ceros

Si el polinomio P tiene coeficientes reales, y si el número complejo z es un cero de P , entonces su conjugada compleja \bar{z} es también un cero de P .

Ejemplo

Hallar un polinomio de grado 3 que tenga coeficientes enteros y ceros 2 y $3 - i$.

Teorema de los Factores Lineales y Cuadráticos

Cada polinomio con coeficientes reales puede ser factorizado en el producto de un factor lineal y otro factor cuadrático irreducible con coeficientes reales.

Ejemplo

Si $P(x) = x^4 + 8x^2 - 9$

- (a) Factorizar en factores lineales y cuadráticos con coeficientes reales.
- (b) Factorizar P completamente en factores lineales con coeficientes complejos.