

PAUTA AUTOEVALUACION PARA LA CUARTA PRUEBA DE CATEDRA

1.- En relación al polinomio $P(x) = 4x^5 + bx^4 + 29x^3 + 43x^2 - 63x - 18 \in \mathbb{R}[X]$

1.1.- Encuentre $b \in \mathbb{R}$ de modo que $3i$ sea una raíz de $P(x)$

1.2.- Factorice al máximo el polinomio en $\mathbb{R}[X]$

1.3.- Factorice al máximo el polinomio en $\mathbb{C}[X]$

RESPUESTAS :

1.1.- Si $3i$ es raíz de $P(X)$ entonces $P(3i) = 0$

$$4 \cdot (3i)^5 + b \cdot (3i)^4 + 29 \cdot (3i)^3 + 43 \cdot (3i)^2 - 63 \cdot 3i - 18 = 0$$

$$972i + 81b - 783i - 387 - 189i - 18 = 0$$

$$b = 5$$

1.2.- Como $P(x) \in \mathbb{R}[X]$, si $3i$ es raíz de $P(x)$ también lo es su conjugado $-3i$

Dividiendo sintéticamente $P(x)$ por $3i$:

$$\begin{array}{r|rrrrrr} 4 & 5 & 29 & 43 & -63 & -18 \\ 3i & 4 & 5 + 12i & -7 + 15i & -2 - 21i & -6i & 0 \end{array}$$

Ahora dividimos sintéticamente por $-3i$:

$$\begin{array}{r|rrrrrr} 4 & 5 + 12i & -7 + 15i & -2 - 12i & -6i \\ -3i & 4 & 5 & -7 & -2 & 0 \end{array}$$

Revisemos como va la descomposición de $P(x)$:

$$P(x) = (x - 3i)(x + 3i)(4x^3 + 5x^2 - 7x - 2)$$

Encontremos raíces para el polinomio $4x^3 + 5x^2 - 7x - 2$

Divisores enteros de -2 , $\pm\{1, 2\}$

Divisores enteros de 4 , $\pm\{1, 2, 4\}$

Posibles raíces en \mathbb{Q} , $\pm\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, 2\}$

Dividamos sintéticamente por 1

$$\begin{array}{r|rrrr} 4 & 5 & -7 & 2 \\ 1 & 4 & 9 & 2 & 0 \end{array}$$

Revisemos la descomposición de $P(x) = (x - 3i)(x + 3i)(x - 1)(4x^2 + 9x + 2)$

Pero vemos que el factor cuadrático es de fácil factorización, $(4x + 1)(x + 2)$

Factorización de $P(x)$ en $\mathbb{R}[X]$: $(x^2 + 9)(x - 1)(4x + 1)(x + 2)$

1.3.- Factorización de $P(x)$ en $\mathbb{C}[X]$: $(x - 3i)(x + 3i)(x - 1)(4x + 1)(x + 2)$

2.- Obtenga la descomposición en suma de fracciones parciales de:

$$\frac{2x^5 + 2x}{x^4 - 1}$$

RESPUESTA :

Primero bajamos el grado : $2x^5 + 2x : x^4 - 1 = 2x$

$$\begin{array}{r} - \quad + \\ \underline{2x^5 - 2x} \\ 4x \end{array}$$

Aplicando el algoritmo de la división :

$$2x^5 + 2x = (x^4 - 1) \cdot 2x + 4x \quad / \cdot \frac{1}{x^4 - 1}$$

$$\frac{2x^5 + 2x}{x^4 - 1} = 2x + \frac{4x}{x^4 - 1}$$

Ahora descomponemos

$$\frac{4x}{x^4 - 1} = \frac{4x}{(x+1)(x-1)(x^2+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$$

$$\frac{4x}{(x+1)(x-1)(x^2+1)} = \frac{A(x-1)(x^2+1) + B(x+1)(x^2+1) + (Cx+D)(x+1)(x-1)}{(x+1)(x-1)(x^2+1)}$$

$$4x = A(x-1)(x^2+1) + B(x+1)(x^2+1) + (Cx+D)(x+1)(x-1)$$

$$x = 1$$

$$4 = 0 + B \cdot 2 \cdot 2 + 0$$

$$B = 1$$

$$x = -1$$

$$-4 = A \cdot -2 \cdot 2 + 0 + 0$$

$$A = 1$$

$$x = 0$$

$$0 = -1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + D \cdot 1 \cdot -1$$

$$D = 0$$

$$x = 2$$

$$8 = 1 \cdot 5 + 3 \cdot 5 + 2C \cdot 3 \cdot 1$$

$$C = -2$$

La descomposición pedida es :

$$\frac{2x^5 + 2x}{x^4 - 1} = 2x + \frac{4x}{x^4 - 1} = 2x + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1} - \frac{2x}{x^2+1}$$

3.- Sea $a \in \mathbb{R}$, sea π_1 el plano de ecuación $2x - y + 3z = a$.

Sea π_2 el plano que contiene a los puntos $P = (1, 1, 2)$ y

$Q = (0, 1, 3)$ y que es paralelo al vector $\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j}$.

Sea π_3 el plano que contiene al punto $R = (1, 1, -1)$ y que es perpendicular a la recta $L : x - 1 = y - 5 = \frac{z-3}{2}$.

Hallar $a \in \mathbb{R}$ de modo que la intersección $\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3$ sea una recta.

RESPUESTA:

Primero determinaremos la ecuación de π_2

Vector director de π_2 , $\overrightarrow{PQ} = Q - P = (0, 1, 3) - (1, 1, 2) = (-1, 0, 1)$

Como π_2 es paralelo al vector $\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j}$ tenemos otro vector director de π_2 a saber $(1, \frac{1}{2}, 0)$

Si calculamos el producto cruz entre los vectores directores obtendremos

el vector normal del plano π_2 , llamémosle $N_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \end{vmatrix}$

$$N_2 = \vec{i} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{vmatrix}$$

$$N_2 = -\frac{1}{2}\vec{i} + \vec{j} - \frac{1}{2}\vec{k} = \left(-\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2}\right)$$

o bien $N_2 = (-1, 2, -1)$

La ecuación de π_2 nos queda $-x + 2y - z + d_2 = 0$

Pero como $(1, 1, 2) \in \pi_2$, sus coordenadas satisfacen la ecuación de π_2

Reemplazando $-1 + 2 - 2 + d_2 = 0$

Obtenemos que $d_2 = 1$

Así la ecuación de π_2 es : $-x + 2y - z + 1 = 0$

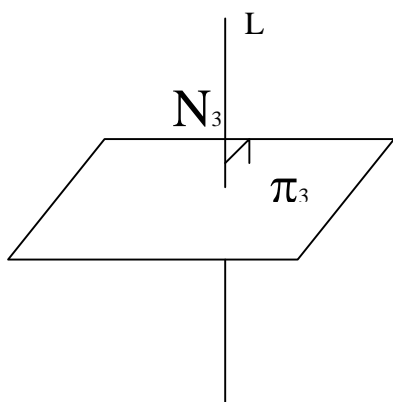
Ahora determinaremos la ecuación de π_3

Al mirar la ecuación simétrica de $L : \frac{x-1}{1} = \frac{y-5}{1} = \frac{z-3}{2}$

vemos que su vector director es $(1, 1, 2)$

Como π_3 es perpendicular a L , tenemos que el vector normal de π_3 es

$N_3 = (1, 1, 2)$, graficamente :



Ecuación de π_3 , $x + y + 2z + d_3 = 0$

Como $(1, 1, -1) \in \pi_3$, se tiene que $1 + 1 - 2 + d_3 = 0$

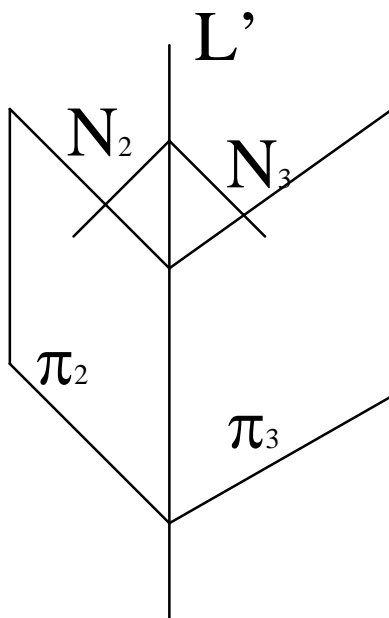
De donde $d_3 = 0$

Así la ecuación del plano π_3 es : $x + y + 2z = 0$

Ahora determinaremos la dirección de la recta donde se intersectan los planos

π_2 y π_3

Graficamente :



Vemos que un vector ortogonal a N_2 y a N_3 nos dará la dirección de la recta L'

Pero sabemos que dicho vector se obtiene calculando $N_2 \times N_3$

$$\text{Así el vector director de } L' \text{ es } N_2 \times N_3 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (5, 1, -3)$$

Por otro lado las ecuaciones cartesianas de la recta L' son :

$$\left. \begin{array}{l} -x + 2y - z + 1 = 0 \\ x + y + 2z = 0 \end{array} \right\}$$

Para obtener un punto de L' , basta considerar una solución particular de este sistema.

Por ejemplo si $z = 0$ el sistema se convierte en $\left. \begin{array}{l} -x + 2y = -1 \\ x + y = 0 \end{array} \right\}$

De donde $y = -\frac{1}{3}, x = \frac{1}{3}$

así tenemos que un punto de L' es el punto de coordenadas $(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 0)$

Luego la ecuación vectorial de la recta L' es :

$$(x, y, z) = \left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 0 \right) + t(5, 1, -3), t \in \mathbb{R}$$

Como se nos pide que la intersección de los 3 planos sea una recta , podemos pedir que

$$\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3 = L'$$

Lo que se cumplirá si $L' \subset \pi_1$

Como la ecuación de π_1 es : $2x - y + 3z = a$

y las ecuaciones paramétricas de L' son $\left. \begin{array}{l} x = \frac{1}{3} + 5t \\ y = -\frac{1}{3} + t \\ z = -3t \end{array} \right\}, t \in \mathbb{R}$

$L' \subset \pi_1$ si se cumple que

$$2\left(\frac{1}{3} + 5t\right) - \left(-\frac{1}{3} + t\right) + 3 \cdot (-3t) = a$$

obteniendo que $a = 1$

si $a = 1$ se cumplirá que la intersección de los 3 planos será una recta.

4.-Sea π el plano que pasa por el punto $(-1, 2, 0)$ y es normal al vector $(1, -3, 4)$. Determine las ecuaciones de los planos paralelos a π tales que se encuentran a $\frac{8}{\sqrt{26}}$ unidades de distancia del origen.

RESPUESTA :

Vector normal de π , $(1, -3, 4)$

Sea π_1 uno de los planos paralelos a π

vector normal de π_1 , $N_1 = (1, -3, 4)$

Sea $Q = (0, 0, 0) \notin \pi_1$ y $P = (x, y, z) \in \pi_1$

$$\overrightarrow{PQ} = (0, 0, 0) - (x, y, z) = (-x, -y, -z)$$

$$d(Q, \pi) = \frac{|(1, -3, 4) \cdot (-x, -y, -z)|}{\|(1, -3, 4)\|} = \frac{8}{\sqrt{26}}$$

$$\frac{|-x+3y-4z|}{\sqrt{1+9+16}} = \frac{8}{\sqrt{26}}$$

$$|-x + 3y - 4z| = 8$$

De donde obtenemos las ecuaciones de los planos pedidos

$$\pi_1 : -x + 3y - 4z = 8 \text{ y } \pi_2 : -x + 3y - 4z = -8$$

5.- Determine la ecuación del plano π , perpendicular a los planos

π_1 y π_2 que equidista de los puntos $P = (-1, 2, 4)$ y $Q = (2, 0, 1)$

donde $\pi_1 : x + 2y - z = 3$ y $\pi_2 : 2x - 3y + 1 = 0$

RESPUESTA :

$N_1 = (1, 2, -1)$ vector director de π

$N_2 = (2, -3, 0)$ vector director de π

Vector normal de π :

$$N = N_1 \times N_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 0 \end{vmatrix} = (-3, -2, -7)$$

Sea $R = (x, y, z) \in \pi$

$$\overrightarrow{RP} = (-1, 2, 4) - (x, y, z) = (-1 - x, 2 - y, 4 - z)$$

$$\overrightarrow{RQ} = (2, 0, 1) - (x, y, z) = (2 - x, -y, 1 - z)$$

$$d(P, \pi) = \frac{|(-3, -2, -7) \cdot (-1 - x, 2 - y, 4 - z)|}{\|(-3, -2, -7)\|} = \frac{|3x + 2y + 7z - 27|}{\sqrt{62}}$$

$$d(Q, \pi) = \frac{|(-3, -2, -7) \cdot (2 - x, -y, 1 - z)|}{\|(-3, -2, -7)\|} = \frac{|3x + 2y + 7z - 13|}{\sqrt{62}}$$

Como $d(P, \pi) = d(Q, \pi)$

$$\frac{|3x + 2y + 7z - 27|}{\sqrt{62}} = \frac{|3x + 2y + 7z - 13|}{\sqrt{62}}$$

De donde $3x + 2y + 7z - 27 = 3x + 2y + 7z - 13 \vee 3x + 2y + 7z - 27 = -3x - 2y - 7z + 13$

Así el plano pedido es $\pi : 3x + 2y + 7z - 15 = 0$