

# NÚMEROS NATURALES

Llamaremos conjunto inductivo a cualquier conjunto  $M$  que cumple con:

1. a.  $M \neq \emptyset$   
b.  $x \in M \Rightarrow x + 1 \in M$

Llamaremos números naturales al menor conjunto inductivo, es decir,  $\mathbb{N}$  es un conjunto que posee sucesor y además tiene un comienzo que llamaremos 1.

## INDUCCIÓN

Si queremos probar una propiedad  $p$  en todos los números naturales ( $\mathbb{N}$ ), un método útil es la inducción que consiste en probar dos cosas:

**Primero:**  $p(n)$  (para algún  $n$ )

en caso que se pruebe para todo  $\mathbb{N}$ ;  $n = 1$

**Segundo:** probar que  $\forall k \in \mathbb{N}$  si  $p(k)$  se verifica, entonces  $p(k + 1)$  también.

$$(\forall k \in \mathbb{N} : p(k) \Rightarrow p(k + 1))$$

### Observaciones:

1. Para probar una propiedad general  $p(n)$  es siempre imprescindible probar las dos etapas.
2. En la segunda etapa se debe suponer cierto  $p(k)$  (hipótesis) y se quiere probar  $p(k + 1)$  (tesis). Para probar la tesis es necesario ocupar de algún modo la hipótesis.

### Ejemplo.

Pruebe la propiedad  $p(n): 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}; \forall n \in \mathbb{N}$ .

### Solución.

1. PD:  $p(1)$

$$p(1) : 1 = \frac{1(1+1)}{2}$$

$\therefore p(1)$  se cumple

2. Sea  $k \in \mathbb{N}$  tal que  $p(k)$  es verdad

PD:  $p(k + 1)$

$$p(k) : 1 + 2 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2} \quad (\text{Hipotesis})$$

$$p(k + 1) : 1 + 2 + \dots + k + (k + 1) = \frac{(k + 1)((k + 1) + 1)}{2} \quad (\text{Tesis})$$

En efecto, podemos ver que:

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 3 + \dots + k + (k + 1) &= \frac{k(k+1)}{2} + k + 1 \\ &= \frac{k^2 + k + 2(k+1)}{2} \\ &= \frac{k^2 + 3k + 2}{2} \\ &= \frac{(k+1)(k+2)}{2} \end{aligned}$$

$\therefore p(k + 1)$  se cumple

$\therefore p(k) \Rightarrow p(k + 1)$

$\therefore$  Por pasos 1 y 2  $p(k)$  es verdad  $\forall k \in \mathbb{N}$ .

## PROGRESIONES ARITMÉTICAS (P.A) y P.G.

Diremos que la sucesión es una P.A. si la **diferencia** entre dos terminos consecutivos de la progresion es constante.

Esto quiere decir que al sucesión es dela siguiente forma:

$$\begin{aligned}a_1 &= a &= a + 0d \\a_2 &= a + d &= a + 1d \\a_3 &= a_2 + d = (a + d) + d &= a + 2d \\a_4 &= a_3 + d = (a + 2d) + d &= a + 3d \\\vdots &&\vdots \\a_n &= a_{n-1} + d = (a + (n-2)d) + d &= a + (n-1)d \\\vdots &&\vdots\end{aligned}$$

Así la suma de los primeros n-términos de una P.A. corresponde a:

$$\begin{aligned}a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n &= a + (a + d) + (a + 2d) + (a + 3d) + \dots + (a + (n-1)d) \\&= na + [1 + 2 + 3 + \dots + (n-1)]d \\&= na + \frac{(n-1)nd}{2} \\&= \frac{n}{2}(a_1 + a_n)\end{aligned}$$

### Ejemplo 1.

Encontrar los 3 primeros terminos, el 9º termino y la suma de los 10 primeros términos de una P.A. en que  $a = 5$  y  $d = 2$ .

**Solución.**

$$a_n = a + (n-1)d$$

$$\text{Así } a_1 = 5; a_2 = 7; a_3 = 9; a_4 = 11; a_9 = 21$$

$$1. \text{ y por otro lado } S_{10} = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = 5(5 + 23) = 140$$

## PROGRESIONES GEOMÉTRICAS (P.G).

Llamaremos progresión geométrica a una sucesión en que la **razón o cociente** entre 2 terminos consecutivos es constante, es decir es una sucesión de la forma:

$$a_1 = a$$

$$a_2 = a \cdot r$$

$$a_3 = a_2 \cdot r = (a \cdot r) \cdot r = ar^2$$

$$a_4 = a_3 \cdot r = (ar^2) \cdot r = ar^3$$

$$\vdots$$

$$a_n = ar^{n-1}$$

$$\vdots$$

De este modo la suma de los  $n$  primeros terminos de una P.G. corresponde a

$$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1} = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}$$

ya que  $S_n = a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1}$  y  $rS_n = ar + ar^2 + \dots + ar^n$ . Sumando ambas tenemos

$$S_n - rS_n = a - ar^n$$

$$S_n(1 - r) = a(1 - r^n)$$

$$S_n = \frac{a(1 - r^n)}{(1 - r)}$$

Esta forma es valida solo si  $r \neq 1$

**Ejemplo 0.** Si  $r = 1$  la P.G. es  $a, a, a, a$  y la suma  $S_n = na$

**Ejemplo 1.**

Determinar el 5º termino y la suma de los 10 primeros terminos de una P.G. con  $a = 3$  y  $r = 2$

**Solución.**

$$a_5 = a \cdot r^4 = 3 \cdot 2^4 = 48$$

$$S_{10} = 3 \frac{2^{10} - 1}{2 - 1} = 3069$$

## PROPIEDADES DE LA SUMATORIA:

Sean  $a_n$  y  $b_n$  dos sucesiones y  $r, s, t \in \mathbb{N}$  tal que  $r \leq s \leq t$ , entonces.

$$\text{i. } \sum_{i=r}^t a_i = \sum_{i=r}^s a_i + \sum_{i=s+1}^t a_i$$

**Ejemplo.**

$$\sum_{j=3}^9 j^2 = \sum_{i=3}^6 j^2 + \sum_{i=7}^9 j^2$$

$$3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 + 8^2 + 9^2 = (3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2) + (7^2 + 8^2 + 9^2)$$

$$\text{ii. } \sum_{i=r}^s \beta a_i = \beta \sum_{i=r}^s a_i; \text{ con } \beta \in \mathbb{R}$$

**Ejemplo.**

$$\sum_{i=5}^{23} 3i = 3 \sum_{i=5}^{22} i$$

$$3(5) + 3(6) + 3(7) + \dots + 3(23) = 3((5 + 6 + \dots + 23))$$

$$\text{iii. } \sum_{i=r}^s \alpha = \alpha(s - r + 1)$$

**Ejemplo.**

$$\sum_{J=5}^{15} 3 = 3(15 - 5 + 1) = 3(11) = 33$$

$$\text{iv. } \sum_{i=r}^s ai + \sum_{i=r}^s bi = \sum_{i=r}^s (ai + bi)$$

**Ejemplo.**

$$\sum_{i=15}^{28} k^2 - \sum_{i=15}^{28} k^2 - 1 = \sum_{i=15}^{28} 1 = 1(14) = 14$$

$$\text{v. } \sum_{i=r}^s ai = \sum_{i=r+t}^{s+t} a(i - t)$$

**Ejemplo.**

$$\sum_{i=5}^{10} (i - 4)^2 = \sum_{i=1}^6 [(i + 4) - 4]^2 = \sum_{i=1}^6 i^2$$

**vi. Telescópica.**

$$\sum_{i=r}^s (a_i - a_{i-1}) = a_s - a_{r-1}$$

Esto se debe a que:

$$\sum_{i=r}^s (a_i - a_{i-1}) = (a_r - a_{r-1}) + (a_{r+1} - a_r) + (a_{r+2} - a_{r+1}) + \dots + (a_{s-1} - a_{s-2}) + (a_s - a_{s-1})$$

**Ejemplo 1.**

$$\sum_{i=5}^8 (\sqrt{i} - \sqrt{i-1}) = \sqrt{10} - \sqrt{5-1} = \sqrt{8} - 2$$

$$(\sqrt{5} - \sqrt{4}) + (\sqrt{6} - \sqrt{5}) + (\sqrt{7} - \sqrt{6}) + (\sqrt{8} - \sqrt{7}) = (\sqrt{8} - \sqrt{4}) = (\sqrt{10} - 2)$$

**Ejemplo 2.**

$$\sum_{i=10}^{15} \left( \frac{1}{i} - \frac{1}{i+1} \right) = \frac{1}{10} - \frac{1}{16}$$

$$= \frac{1}{10} - \frac{1}{11} + \frac{1}{11} - \frac{1}{12} + \frac{1}{12} - \frac{1}{13} + \frac{1}{13} - \frac{1}{14} + \frac{1}{14} - \frac{1}{15} + \frac{1}{15} - \frac{1}{16}$$

**Ejemplo 3.**

$$\sum_{i=1}^{10} (\sqrt{2i+3} - \sqrt{2i+1}) = \sqrt{23} - \sqrt{3}$$

## FORMULAS IMPORTANTES:

- i.  $\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$
- ii.  $\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
- iii.  $\sum_{i=1}^n i^3 = \left( \frac{n(n+1)}{2} \right)^2$
- iv.  $\sum_{i=1}^n a + (i-1)d = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$

Se llamara productoria de los  $r$  hasta  $s$  de la sucesión  $a_n$  al valor de

$$\prod_{i=r}^s a_i = a_r \cdot a_{r+1} \cdot \dots \cdot a_{s-1} \cdot a_s$$

### Ejemplos:

- 1.  $\prod_{i=2}^7 i^2 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 4^2 \cdot 5^2 \cdot 6^2 \cdot 7^2$
- 2.  $\prod_{i=1}^n i = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \dots \cdot n = n!$

## PROPIEDADES DE LA PRODUCTORIA:

Sean  $a_n$  y  $b_n$  dos sucesiones y  $r, s, t \in \mathbb{N}$  tal que  $r \leq s \leq t$ , entonces.

$$\text{i. } \prod_{i=r}^t a_i = \prod_{i=r}^s a_i \cdot \prod_{i=s+1}^t a_i$$

### Ejemplo.

$$\prod_{j=3}^9 j^2 = \prod_{i=3}^6 j^2 \cdot \prod_{i=7}^9 j^2$$

$$3^2 \cdot 4^2 \cdot 5^2 \cdot 6^2 \cdot 7^2 \cdot 8^2 \cdot 9^2 = (3^2 \cdot 4^2 \cdot 5^2 \cdot 6^2) \cdot (7^2 \cdot 8^2 \cdot 9^2)$$

$$\text{ii. } \prod_{i=r}^s a_i^\beta = \left( \prod_{i=r}^s a_i \right)^\beta \text{ con } \beta \in \mathbb{Q}$$

### Ejemplo.

$$\prod_{i=5}^{23} 3i = 3^{22-5+1} \prod_{i=5}^{22} i$$

$$3(5) \cdot 3(6) \cdot 3(7) \cdot \dots \cdot 3(23) = 3^{18} (5 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 23)$$

$$\text{iii. } \prod_{i=r}^s \alpha = \alpha^{(s-r+1)}$$

### Ejemplo.

$$\prod_{j=5}^{15} 3 = 3^{(15-5+1)} = 3^{(11)}$$

$$\text{iv. } \prod_{i=r}^s a_i \cdot \prod_{i=r}^s b_i = \prod_{i=r}^s (a_i \cdot b_i)$$

**Ejemplo.**

$$\prod_{i=15}^{28} k^2 : \prod_{i=15}^{28} (k^2 - 1) = \prod_{i=15}^{28} \frac{k^2}{k^2 - 1}$$

$$\text{v. } \prod_{i=r}^s a_i = \prod_{i=r+t}^{s+t} a_{(i-t)}$$

**Ejemplo.**

$$\prod_{i=5}^{10} (i-4)^2 = \prod_{i=1}^6 [(i+4)-4]^2 = \prod_{i=1}^6 i^2$$

**vi. Telescópica.**

$$\prod_{i=r}^s \left( \frac{a_i}{a_{i-1}} \right) = \frac{a_s}{a_{r-1}}$$

Esto se debe a que:

$$\prod_{i=r}^s \left( \frac{a_i}{a_{i-1}} \right) = \left( \frac{a_r}{a_{r-1}} \right) \cdot \left( \frac{a_{r+1}}{a_r} \right) \cdot \left( \frac{a_{r+2}}{a_{r+1}} \right) \cdot \dots \cdot \left( \frac{a_{s-1}}{a_{s-2}} \right) \cdot \left( \frac{a_s}{a_{s-1}} \right)$$

## TEOREMA DEL BINOMIO.

Para cualquier  $n \in \mathbb{N}$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

En particular, podemos ver que:

Si  $n = 0$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k = \binom{0}{0} a^0 b^0 = 1$$

Si  $n = 1$

$$(a+b)^1 = \sum_{k=0}^1 \binom{1}{k} a^{1-k} b^k = \binom{1}{0} a^1 b^0 + \binom{1}{1} a^0 b^1 = a + b$$

Si  $n = 2$

$$(a+b)^2 = \sum_{k=0}^2 \binom{2}{k} a^{2-k} b^k = \binom{2}{0} a^2 b^0 + \binom{2}{1} a^1 b^1 + \binom{2}{2} a^0 b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

**Observaciones.**

1. El desarrollo de  $(a+b)^n$  posee  $n+1$  términos.
2. Si  $n$  es par existe un término central, pero si  $n$  es impar existen  $2$  términos centrales.
3. Llamaremos coeficientes de un término a su valor numérico.
4. Llamaremos término independiente de  $x$ , o parte literal, al que posea la expresión  $x^0$ .

**Ejemplo.**

1. En el desarrollo de  $\left(\frac{x^2}{2} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{20}$  encuentre si existe, el término central y el término independiente de  $x$ .

**Solución.**

$$\left(\frac{x^2}{2} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{20} = \sum_{k=0}^n \binom{20}{k} \left(\frac{x^2}{2}\right)^{20-k} \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^k$$

El término central es el que ocupa la posición 11, así

$$\begin{aligned} T_{11} &: \binom{20}{10} \left(\frac{x^2}{2}\right)^{20-10} \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{10} \\ T_{11} &: \binom{20}{10} \left(\frac{1}{2}\right)^{10} (x^2)^{10} (x^{-\frac{1}{2}})^{10} \\ T_{11} &: \underbrace{\binom{20}{10} \left(\frac{1}{2}\right)^{10}}_{\text{Coeficiente}} x^{20} x^{-5} \\ T_{11} &: \binom{20}{10} \left(\frac{1}{2}\right)^{10} x^{15} \end{aligned}$$

Busquemos el termino independiente para ello necesitamos el

$$t_{k+1} = \binom{20}{k} \left(\frac{x^2}{2}\right)^{20-k} \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^k,$$

así

$$\begin{aligned} \binom{20}{k} \left(\frac{x^2}{2}\right)^{20-k} \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^k &= \binom{20}{k} (x^2)^{20-k} \left(\frac{1}{2}\right)^{20-k} (x^{-\frac{1}{2}})^k \\ &= \binom{20}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^{20-k} x^{40-2k} x^{-\frac{k}{2}} \\ &= \binom{20}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^{20-k} x^{40-2k-\frac{k}{2}} \end{aligned}$$

para determinar el termino independiente debemos hacer el exponente de la parte literal igual a cero.

$$\begin{aligned} 40 - 2k - \frac{k}{2} &= 0 \\ 80 - 4k - k &= 0 \\ 5k &= 80 \\ k &= 16 \end{aligned}$$