

Números Naturales

Inducción, Progresiones, Sumatorias y Teorema del Binomio.

1. Demostrar que los números de la forma $u_n = 2^{2n+1} - 9n^2 + 3n - 2$ son divisibles por 54

2. Demostrar que: $u_n = 3^{4n+2} + 5^{2n+1}$ es múltiplo de 14

3. Demostrar que $\forall n \in \mathbb{N}; f(n) = 10^n + 3 \cdot 4^{n+2} + 5$ es divisible por 9

4. Demuestre que si n es cualquier entero positivo, $\frac{1}{3}(n^3 + 2n)$ es un entero.

5. Demostrar $\forall n \in \mathbb{Z}; z \geq 4$, que $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n = n! > 2^n$

6. En los siguientes problemas use el principio de inducción Matemática para probar que la proposición dada es verdadera para el entero positivo

a. $2 + 4 + 6 + \dots + 2n = n^2 + n$

b. $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

c. $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^n} \right) + \frac{1}{2^n} = 1$

d. $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$

e. $n^3 + 2n$ es divisible por 3

f. 4 es factor de $5^n - 1$

7. Demostrar que $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$

8. Demostrar $\sum_{i=0}^n \frac{1}{(2i+1)(2i+3)} = \frac{n+1}{2n+3}$

9. Demostrar $\sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \frac{4(i+1)}{(2i+1)(2k+5)} = \frac{1}{3} + (-1)^{n-1} \frac{1}{2n+3}$

10. Demuestre y calcule $\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k k^2 = \sum_{k=1}^n (4k-1)$

11. Calcular $S = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$
Sol. $\frac{n}{2n+1}$

12. Calcular: $S = \sum_{k=1}^n \frac{k^4 + k^2 + 1}{k^4 + k}$
Sol. $\frac{n(n+2)}{n+1}$

13. Calcular: $S = \sum_{k=1}^n \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}$
Sol. $1 - \frac{1}{(n+1)^2}$

14. Calcular: $S = \sum_{k=1}^n k \log\left(\frac{k+1}{k}\right)$
Sol. $\log \frac{(n+1)^n}{n!}$

15. Calcular: $S = \sum_{k=1}^n k k!$
Sol. $(n+1)! - 1$

16. Calcular la suma de 10 términos de la sucesión $S = \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \dots$
Sol. 0.9999999749

17. Calcular: $S = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k+1-k^2}{(k+1)!}$

Sol. $1 + \frac{n-1}{n!}$

18. Calcular: $S = \sum_{k=1}^n \frac{4}{1+k^2+k^4}$

Sol. $\frac{1}{2} \left[1 - \frac{1}{1+n^2+n} \right]$

19. Calcular: $S = \sum_{k=1}^n \frac{k2^k}{(k+2)!}$

Sol. $\frac{2}{2!} - \frac{2^{n+1}}{(n+2)!}$

20. Calcular: $S = \sum_{j=2}^{n+2} (j-1)^4 - \sum_{k=1}^n k^4$

Sol. $(n+1)^4$

21. Calcular la suma de: $S = 4 \cdot 7 + 7 \cdot 12 + 10 \cdot 17 + \dots + 157 \cdot 262$

Sol. 738712

22. Calcular la suma de: $S = \frac{1}{8} + \frac{1}{15} + \frac{1}{24} + \frac{1}{35} + \dots + \frac{1}{6240}$

Sol. $S_{77} = 0.404087553$

23. Calcular $S_n = \frac{5}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{7}{2 \cdot 3} \cdot \frac{1}{3^2} + \frac{9}{3 \cdot 4} \cdot \frac{1}{3^3} + \dots$

Sol. $1 - \frac{1}{(n+1)3^n}$

24. Calcular $S_n = \frac{1}{3!} + \frac{5}{4!} + \frac{11}{5!} + \frac{19}{6!} + \dots$

Sol. $\frac{1}{2!} - \frac{n+1}{(n+2)}$

25. Sabiendo que $(a + 1)^5 = a^5 + 5a^4 + 10a^3 + 10a^2 + 5a + 1$, demostrar que

$S = \sum_{k=1}^n k^4$ cumple con la ecuación:

$$(n + 1)^5 = 1 + 5S + 10\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + 10\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 5\frac{n(n+1)}{2} + n.$$

Encuentre el valor de S cuando $n = 5$.

$$\text{Sol. } S = \frac{1}{5} \left(6^5 - \left(1 + 10\frac{30^2}{4} + 10\frac{330}{6} + 5\frac{30}{2} + 5 \right) \right) = 979$$

26. Demuestre por inducción que $\sum_{k=1}^n k(n - k + 1) = \frac{1}{6}n(n + 1)(n + 2)$

27. Si $\sum_{i=1}^n u_i = 2n^2 + 3n$, calcule el valor de $\sum_{i=n+1}^{2n} u_i$ y u_i

$$\text{Sol. } u_n = 4n + 1$$

28. Demostrar que $\sum_{k=1}^{2n+1} (-1)^{k-1} k^2 = (n + 1)(2n + 1)$

29. Calcule $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i \frac{2^j}{3^i}$

$$\text{Sol. } \left(\frac{1}{3}\right)^n - 4\left(\frac{2}{3}\right)^n + 3$$

30. Sumar 17 términos de: 49, 44, 39, ...

$$\text{Sol. } S_{17} = 153$$

31. Sumar 19 términos de: $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{7}{12}$, ...

$$\text{Sol. } S_{19} = 0$$

32. Dado que la P.A. $-35x, \dots, 3x$ calcular el término general sabiendo que existen 17 términos, entre los extremos.

$$\text{Sol. } f(n) = -35x + (n-1)\frac{19}{9}x$$

- 33.** El tercer término de una P.A es 18 y el séptimo es 30. Encontrar S_{17}

$$\text{Sol. } S_{17} = 612$$

- 34.** Encontrar el número de términos de la P.A.: 12, 16, 20, ... si $S_n = 208$
-

- 35.** En una P.A., $f(3) = 4f(1)$ y $f(6) = 17$, determinar la P.A

$$\text{Sol. } 2, 5, 8, 11, \dots$$

- 36.** Si $f(4) = 0$; $f(42) = -95$ y $f(n) = -125$. Encuentre a y n

$$\text{Sol. } a = \frac{285}{38}; d = -\frac{95}{38}; n = 54$$

- 37.** Encontrar todos los números entre 100 y 1000, que sean divisibles por 14

$$\text{Sol. } 64$$

- 38.** Si a, b, c están en P.A y se tiene $ax^2 + 2bx + c = 0$, demuestre que la ecuación admite como solución a -1
-

- 39.** La suma de los 50 primeros términos de una P.A es 200 y la de los 50 siguientes 2700. Encontrar a y d .

$$\text{Sol. } a = -\frac{41}{2}; d = 1$$

- 40.** Demostrar que $\forall n \in \mathbb{N}$, se cumple que la suma de n términos de la serie: 4, 12, 20, 28, ... es un cuadrado perfecto.

- a.** Encontrar $\sqrt{4624}$

- b.** Encontrar r si $f(r) + f(r+1) = S_{16}$

$$\text{Sol. Como } d = 8; \sqrt{S_n} = 2n$$

$$(a) : S_{34}$$

$$(b) : S_{16} \text{ y } r = 64$$

41. Calcular la siguiente suma: $S_n = \frac{1}{1 + \sqrt{x}} + \frac{1}{1 - x} + \frac{1}{1 - \sqrt{x}} + \dots$

Sol. $\frac{n}{2(1-x)}(2 + (n-3)\sqrt{x})$

42. Demostrar que el término de lugar $(n+1)$ de una P.G cuyo primer término es " a " y el tercer término es b , es igual al término de lugar $(2n+1)$ de otra P.G cuyo primer término es a y cuyo quinto término es b .

Sol. Primera P.G $f(n+1) = a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{n}{2}}; r = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{2}}$

Segunda P.G $f(2n+1) = a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{2n}{4}}; r = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{4}}$

43. Calcular los ángulos de un cuadrilátero sabiendo que estos ángulos están en P.G y que el ángulo mayor es 9 veces el segundo.

Sol. Angulos de $9^\circ, 27^\circ, 81^\circ, 243^\circ$

44. Si a, b, c están en P.H., demostrar que $\frac{a}{a-b} = \frac{a+c}{a-c}$

45. Si $\frac{1}{b-a}; \frac{1}{2b}; \frac{1}{b-c}$ están en P.A, demostrar que a, b, c están en P.G

46. La suma de tres números en P.G es 70, si los extremos son amplificados por 4 y el del medio por 5, la serie está en P.A. Hallar los números.

Sol. Los números son: 10, 20, 40 ó 40, 20, 10

47. Hallar una P.A cuyo primer término sea la mitad del cuarto término y tal que los términos de lugares 2, 10 y 34 forman una P.G

Sol. P.A resultante: $1, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}, 2, \dots$

48. Una pareja decide ahorrar U\$5 cada mes durante el primer año de su matrimonio, U\$15 cada mes durante el segundo año de su matrimonio, U\$25 cada mes durante el tercer año, y así sucesivamente aumentando la cantidad mensual U\$10 cada año. Halle la cantidad que habrá ahorrado cada mes del decimoquinto año.

Sol. U\$145

49. Para el problema anterior encuentre una fórmula para la cantidad que la pareja habrá ahorrado cada mes del n -ésimo año

50. Si se invierten U\$1.000 a 7% de interés compuesto anual, halle la cantidad en la cuenta después de 20 años.

Sol. U\$3870

51. ¿A qué tasa de interés compuesto anual se deben depositar U\$450 para tener U\$750 en 8 años?

Sol. 6.6%

52. Considere las sucesiones 0, 1, 2, 4, 8, 16 y 0.4, 0.7, 1.0, 1.6, 2.8, 5.2. Cada término de la segunda sucesión se obtiene por 0.3 y luego sumándole 0.4. En 1772 el astrónomo alemán J. E. Bode arguyó que la segunda sucesión podría usarse para predecir las distancias medias del Sol a los planetas (medidas en unidades astronómicas: 1 U.A.=93 millones de millas). Los términos de la sucesión de Bode concuerdan razonablemente bien con las distancias reales (en U.A.) para Mercurio (0.39), Venus (0.72), la Tierra (1.0), Marte (1.52), los asteroides (2.77) y Júpiter y Júpiter (5.2). Use la sucesión de Bode para predecir las distancias medias del Sol a los planetas Saturno, Urano, Neptuno y Plutón. Compare sus respuestas con las distancias reales 9.54, 19.18, 30.07 y 39.46, respectivamente.

Sol. 10, 19.6, 38.8, 77.2

53. Se observa que la población de cierta comunidad aumenta geométricamente en un factor de $\frac{3}{2}$ cada año. Si la población es de 1000 al comienzo del primer año, halle la población al comienzo del undécimo año.

Sol. 57665

54. Todas las personas tienen 2 padres. Determine cuantos tatara-tatarabuelos tendrá una persona.

Sol. 32

55. Una pareja decide ahorrar U\$5 cada mes durante su primer año de

matrimonio, U\$15 cada mes durante el segundo año, U\$25 cada mes para el tercer año, y así sucesivamente aumentando la cantidad mensual U\$10 cada año. Halle la suma total que habrá ahorrado al final del decimoquinto año.

Sol. U\$13500

56. Un automóvil que se acelera en una razón constante corre 2 metros el primer segundo, 6 metros el segundo segundo, 10 metros el tercer segundo, y así sucesivamente recorre 4 metros adicionales cada segundo. Halle la distancia total que el automóvil ha recorrido después de 6 segundos.

Sol. 72 m

57. En el desarrollo $\left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{3x}\right)^9$. Hallar:

- a. el quinto término
- b. el término que contiene x^5
- c. el término independiente de x

Sol.

$$(a) : T_5 = \binom{9}{4} \left(\frac{3}{2}\right)^5 \left(-\frac{1}{3}\right)^4 x^6$$

(b) : no existe el término

$$(c) : T_7 = \binom{9}{6} \left(\frac{3}{2}\right)^3 \left(-\frac{1}{3}\right)^6 = \frac{7}{18}$$

58. Encontrar el término que contiene x^2 en el desarrollo : $\left(\sqrt[3]{x} - \frac{2}{x^2}\right)^{27}$

Sol. $T_4 = -23400x^2$

59. Encontrar:

a. el coeficiente de x^n en: $(1 - x + x^2)(1 + x)^{2n+1}$

b. el término independiente de x en: $\left(x - \frac{1}{x^2}\right)^{12}$

$$\text{Sol. (a) : } \binom{2n+1}{n} - \binom{2n+1}{n-1} + \binom{2n+1}{n-2}$$

60. Encuentre el término central de $\left(x + \frac{1}{x}\right)^{12}$

$$\text{Sol. } T_7 = \binom{12}{6} x^6$$
