

1. Considere la sucesión definida por recurrencia como:

$$a_n = \begin{cases} 2 & \text{si } n = 1 \\ 3a_{n-1} - 2 & \text{si } n \geq 2 \end{cases}$$

- a. Encuentre los términos $a_2; a_3; a_4$ y conjeture una fórmula no recursiva para a_n
- b. Pruebe la fórmula por inducción.
- c. Calcule el valor de $\sum_{n=1}^{2n} a_n$
- 2.
- a. En una P.A. se sabe que $S_p = S_q$ con $p \neq q$. Pruebe que $S_{p+q} = 0$
- b. La suma de tres números en P.G. es 70, si los extremos son multiplicados por 4 y el del medio por 5 la serie está en P.A. Hallar los números.
3. Calcule el valor de:

a.

$$\sum_{k=0}^{2n-1} \frac{k^2 + 4^k + 3^k}{4^k}$$

b.

$$\sum_{k=1}^n \frac{k \cdot 3^{k-1}}{5}$$

4. Determine si en el desarrollo de $\left(\frac{2x}{3} - \frac{9}{x^2}\right)^{75}$ existen:
- a. El coeficiente de t_9 .
- b. Calcule $\frac{t_{43}}{t_{24}}$
- c. Un término independiente de x .
- d. Un término cuya potencia de x sea x^{-5} .

Desarrollo

1. Considere la sucesión definida por recurrencia como:

$$a_n = \begin{cases} 2 & \text{si } n = 1 \\ 3a_{n-1} - 2 & \text{si } n > 1 \end{cases}$$

- a. Encuentre los términos $a_2; a_3; a_4$ y conjeture una fórmula no recursiva para a_n
 $a_2 = 3 \cdot 2 - 2 = 4$; $a_3 = 3 \cdot 4 - 2 = 10$; $a_4 = 3 \cdot 10 - 2 = 28$. En general, $a_n = 3^n - 1$

- b. Pruebe la fórmula por inducción.

Sea la propiedad $P(n) : a_n = 3^n - 1$.

En efecto, analizando $P(1)$ tenemos que $a_1 = 3^1 - 1 = 2$ por lo que $P(1)$ es verdadero.

Si $k \in \mathbb{N}$ cualquiera, tal que $P(k)$ es verdadero, queremos demostrar que $P(k+1)$ es verdadero. En efecto la hipótesis es $P(k) : a_k = 3^k - 1$ y la tesis corresponde a $P(k+1) : a_{k+1} = 3^{k+1} - 1$

Así es como $a_{k+1} = 3a_k - 2 = 3(3^k - 1) - 2 = 3^{k+1} - 3 - 2 = 3^{k+1} - 5$. por lo tanto $P(k+1)$ es verdadero. Así se cumple que $P(k) \Rightarrow P(k+1)$ y de este modo vemos que $P(n)$ es verdadero para cualquier $n \in \mathbb{N}$

- c. Calcule el valor de $\sum_{n=1}^{2n} a_n$

$$\sum_{k=1}^{2n} a_k = \sum_{k=1}^{2n} (3^k - 1) = \sum_{k=1}^{2n} 3^k - \sum_{k=1}^{2n} 1 = 3 \left(\frac{1-3^{2n+1}}{1-3} \right) - 2n$$

2.

- a. En una P.A. se sabe que $S_p = S_q$ con $p < q$. Pruebe que $S_{p+q} = 0$
Sabemos que:

$$\begin{aligned} S_p &= S_q \Rightarrow \frac{p}{2} (2a + (p-1)d) = \frac{q}{2} (2a + (q-1)d) \\ 2ap &= p^2 + p d \quad 2aq = q^2 + q d \\ 2a(p-q) &= p^2 - q^2 + p d - q d = 0 \\ p &= q \quad 2a = p + q - 1 d = 0 \\ 2a &= p + q - 1 d = 0 \\ \frac{p-q}{2} (2a + (p+q-1)d) &= 0 \\ S_{p+q} &= 0 \end{aligned}$$

- b. La suma de tres números en P.G. es 70, si los extremos son amplificados por 4 y el del medio por 5 la serie está en P.A. Hallar los números.

Si los números son $a; ar; ar^2$ sabemos que:

$$a + ar + ar^2 = 70$$

y $4a; 5ar; 4ar^2$ están en P.A. por lo que

$$5ar - 4a = 4ar^2 - 5ar \Rightarrow a + 4r^2 - 10r + 4 = 0 \Rightarrow a = 0 \quad r = 2 \quad r = \frac{1}{2}$$

Notemos que a no puede valer 0 pues en ese caso $a + ar + ar^2 = 70$.

Si $r = 2$ entonces $a = 2a = 4a = 70 = a = 10$ y los números son 10; 20 y 40.

Si $r = \frac{1}{2}$ entonces $a = \frac{a}{2} = \frac{a}{4} = 70 = a = 40$ y los números son 40; 20 y 10.

3. Calcule el valor de:

a.

$$\sum_{k=0}^{2n-1} \frac{\binom{2n-1}{k} 2^k 4^k 3^k}{4^k} = \sum_{k=0}^{2n-1} \binom{2n-1}{k} 2^k \left(\frac{3}{4}\right)^k$$

$$= \sum_{k=0}^{2n-1} \binom{2n-1}{k} \left(\frac{3}{4}\right)^k$$

$$= \left(\sum_{k=0}^{2n-1} \binom{2n-1}{k} \right) \left(\frac{3}{4}\right)^k$$

$$= \frac{2^{2n-1} - 2^{2n-2}}{2} = \frac{2^{2n-1} - 2^{2n-2}}{2} \left(\frac{3}{4}\right)^n \left(\frac{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n}{1 - \left(\frac{3}{4}\right)} \right)$$

b.

$$\sum_{k=1}^n \frac{\binom{n}{k} 3^{k-1}}{5} = \frac{\left(\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \right) 3^{k-1}}{5} = \frac{n! 3^{k-1}}{5^n}$$

$$= \frac{n! 3^{k-1}}{5^n} = \frac{n! 3^{k-1}}{5^n}$$

$$= \frac{n! 3^{n-1}}{5^n}$$

4. Determine si en el desarrollo de $\left(\frac{2x}{3} - \frac{9}{x^2}\right)^{75}$ existen:

a. El coeficiente de t_9 .

El coeficiente t_{k-1} corresponde a:

$$t_{k-1} = \binom{75}{k} \left(\frac{2x}{3}\right)^{75-k} \left(-\frac{9}{x^2}\right)^k = \binom{75}{k} \frac{2^{75-k}}{3^{75-k}} x^{75-k} 9^k x^{-2k}$$

$$t_{k-1} = 1^{-k} \binom{75}{k} \frac{2^{75-k}}{3^{75-3k}} x^{75-3k}$$

Así tenemos que:

$$\text{Coef } t_9 = \binom{75}{8} \frac{2^{67}}{3^{51}}$$

b. Calcule $\frac{t_{43}}{t_{24}}$

$$\frac{t_{43}}{t_{24}} = \frac{\binom{75}{42} \frac{2^{33}}{3^{51}}}{1 \binom{75}{23} \frac{2^{52}}{3^6} x^6} = \frac{\binom{75}{42} 3^{57}}{\binom{75}{23} 2^{19} x^{57}}$$

c. Un término independiente de x .

Para esto, debe ocurrir que $75 - 3k = 0 \Rightarrow k = 25$ por lo que el término independiente de x corresponde a:

$$t_{26} = \left(\frac{75}{25} \right) 2^{50}$$

- d.** Un término cuya potencia de x sea x^{-5} .

Para esto, debe ocurrir que $75 - 3k = -5 \Rightarrow k = \frac{80}{3}$ lo que no es válido porque en este caso $k \notin \mathbb{N}$ de modo que no existe dicho término.