

EJERCICIOS RESUELTOS DE SUMATORIAS Y TEOREMA DEL BINOMIO

1.- En el desarrollo del siguiente binomio $\left(\frac{3}{2}x^3 - \frac{1}{3x}\right)^{21}$ determine, si existe :

- el término independiente de x
- el coeficiente de x^{-9}
- el noveno término
- la diferencia de los coeficientes de x^{35} y x^{27} , respectivamente.

Primero (*) dejaremos el coeficiente por la potencia de la indeterminada x en un término cualquiera del desarrollo de éste binomio, llamémosle t_k

$$t_k = \binom{21}{k-1} \cdot \left(\frac{3}{2} \cdot x^3\right)^{21-(k-1)} \cdot \left(\frac{-1}{3x}\right)^{k-1}$$

$$(*) t_k = \binom{21}{k-1} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{22-k} \cdot \left(\frac{-1}{3}\right)^{k-1} \cdot x^{3(22-k)+1-k}$$

$$t_k = \binom{21}{k-1} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{22-k} \cdot \left(\frac{-1}{3}\right)^{k-1} \cdot x^{67-4k}$$

a) en el término independiente aparece x^0 , luego se nos pide que

$$x^{67-4k} = x^0$$

de donde resolvemos la ecuación:

$$67 - 4k = 0$$

$$k = \frac{67}{4} \notin \mathbb{U}$$

como k debe ser un número natural, éste desarrollo no tiene término independiente.

b) se nos pide que $x^{-9} = x^{67-4k}$

$$\text{resolvemos } -9 = 67 - 4k$$

$$k = 19$$

luego el término es t_{19} y se nos pide sólo su coeficiente el cual es :

$$\binom{21}{18} \left(\frac{3}{2}\right)^3 \left(\frac{-1}{3}\right)^{18}$$

c) Para t_9 el valor de k es 9. Observe que en la fórmula se está trabajando con $k-1$

$$\text{Luego } t_9 = \binom{21}{8} \left(\frac{3}{2}\right)^{13} \left(\frac{-1}{3}\right)^8 \cdot x^{31}$$

d) $67 - 4k = 35 \Rightarrow k = 8$, luego el coeficiente de x^{35} es $\binom{21}{7} \left(\frac{3}{2}\right)^{14} \left(\frac{-1}{3}\right)^7$

$$67 - 4k = 27 \Rightarrow k = 10, \text{ luego el coeficiente de } x^{27} \text{ es } \binom{21}{9} \left(\frac{3}{2}\right)^{12} \left(\frac{-1}{3}\right)^9$$

Luego la diferencia de los coeficientes de x^{35} y x^{27} es :

$$\binom{21}{7} \left(\frac{3}{2}\right)^{14} \left(\frac{-1}{3}\right)^7 - \binom{21}{9} \left(\frac{3}{2}\right)^{12} \left(\frac{-1}{3}\right)^9$$

2.- Determine el valor de $a \in \mathbb{R} - \{0\}$ para que los coeficientes de x^7 y x^5 en el desarrollo de $(x - 2a)^9$ sean iguales.

En éste problema usaremos la fórmula :

$$t_{k+1} = \binom{9}{k} x^{9-k} (-2a)^k \text{ agrupando en forma conveniente :}$$

$$t_{k+1} = \binom{9}{k} (-2)^k a^k x^{9-k} \text{ tenemos que :}$$

en el término que aparece x^7 se debe cumplir que $x^{9-k} = x^7$

$$\text{resolvemos } 9 - k = 7$$

$$k = 2$$

luego el coeficiente de x^7 es $\binom{9}{2} (-2)^2 a^2$

en el término que aparece x^5 se debe cumplir que $x^{9-k} = x^5$

$$9 - k = 5$$

$$k = 4$$

luego el coeficiente de x^5 es $\binom{9}{4} (-2)^4 a^4$

Como se nos pide hallar a para que éstos coeficientes sean iguales

resolvemos la ecuación $\binom{9}{2}(-2)^2 a^2 = \binom{9}{4}(-2)^4 a^4$

$$\frac{9!}{7!2!} \cdot 4a^2 = \frac{9!}{5!4!} \cdot 16a^4$$

$$a^2 = 14a^4$$

$$14a^4 - a^2 = 0$$

$$a^2(14a^2 - 1) = 0$$

$$a^2 = 0 \vee 14a^2 = 1$$

Pero a no puede ser cero ya que el desarrollo corresponde a una potencia de binomio y no de un monomio (a saber x^9)

$$\text{Luego } a = \sqrt{\frac{1}{14}} \vee a = -\sqrt{\frac{1}{14}}$$

3.- Expresar en términos de n la siguiente sumatoria :

$$\sum_{k=1}^n \left[3k + \frac{3^{k!}}{k^2} - \frac{3^{(k+1)!}}{k^2+2k+1} \right]$$

Primero **observe** los dos términos mas complicados y note que corresponde a una diferencia del tipo $a_k - a_{k+1}$, para lo cual efectuando un arreglo de signos usted podrá aplicar telescópica.

$$\begin{aligned} \text{Separamos : } \sum_{k=1}^n 3k - \sum_{k=1}^n \left[\frac{3^{(k+1)!}}{(k+1)^2} - \frac{3^{k!}}{k^2} \right] &= 3 \cdot \frac{n(n+1)}{2} - \left[\frac{3^{(n+1)!}}{(n+1)^2} - \frac{3^{1!}}{1^2} \right] \\ &= 3 \cdot \frac{n(n+1)}{2} - \frac{3^{(n+1)!}}{(n+1)^2} + 3 \end{aligned}$$

4.- Determine si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

$$\text{a) } \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^{n-k} = 3^n$$

$$\text{b) } \sum_{k=8}^{40} (\sqrt{2k+1} - \sqrt{2k}) = 5$$

a) Observe que n es una constante y k es la variable.

Observe que la sumatoria es parecida a la fórmula del desarrollo de la potencia de un binomio. Bastaría con hacer aparecer el término elevado a k y luego saber cual es el binomio. Para ello pensemos en 1^k expresión que no cambiará el valor de ésta suma.

Así $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^{n-k} \cdot 1^k = (2+1)^n = 3^n$. La proposición es verdadera.

b) Aquí podemos tentarnos en pensar que podemos aplicar la propiedad telescópica. Pero para ello deberíamos tener la expresión $a_{k+1} - a_k$

Ahora si consideramos $a_k = \sqrt{2k}$ entonces $a_{k+1} = \sqrt{2(k+1)}$

Término que no corresponde a $\sqrt{2k+1}$.

Luego la proposición es falsa.

5.- Calcule el valor de la siguiente suma:

$$\sum_{k=10}^{54} \left(\frac{ke^k + e^k - e^{k+1}}{(k+1)!} - \frac{2e^k}{3} \right)$$

Separemos : $\sum_{k=10}^{54} \left(\frac{(k+1)e^k - e^{k+1}}{(k+1)!} \right) - \frac{2}{3} \sum_{k=10}^{54} e^k =$

El término general de la primera sumatoria lo descomponemos en una resta y aplicamos las propiedades de los factoriales, mientras que para la segunda sumatoria observamos que corresponde a la suma de términos en P.G., donde el primer término es e^{10} y la razón es e , y se están sumando $54 - 10 + 1$ términos. Luego tenemos :

$$\sum_{k=10}^{54} \left[\frac{(k+1)e^k}{(k+1)!} - \frac{e^{k+1}}{(k+1)!} \right] - \frac{2}{3} \frac{e^{10}(1-e^{45})}{1-e} =$$

$$\sum_{k=10}^{54} \left[\frac{(k+1)e^k}{(k+1)k!} - \frac{e^{k+1}}{(k+1)!} \right] - \frac{2e^{10}(1-e^{45})}{3(1-e)} =$$

$$\begin{aligned} & \sum_{k=10}^{54} \left[\frac{e^k}{k!} - \frac{e^{k+1}}{(k+1)!} \right] - \frac{2e^{10}(1-e^{45})}{3(1-e)} = \\ & - \sum_{k=10}^{54} \left[\frac{e^{k+1}}{(k+1)!} - \frac{e^k}{k!} \right] - \frac{2e^{10}(1-e^{45})}{3(1-e)} = \\ & - \left[\frac{e^{54+1}}{(54+1)!} - \frac{e^{10}}{10!} \right] - \frac{2e^{10}(1-e^{45})}{3(1-e)} = \\ & \frac{e^{10}}{10!} - \frac{e^{55}}{55!} - \frac{2e^{10}(1-e^{45})}{3(1-e)} \end{aligned}$$

Observe que la propiedad telescópica se ocupó igual que en las sumatorias que parten de 1 .

6.-Calcule en términos de n la siguiente sumatoria :

$$\sum_{k=4}^n \frac{k(2k-5) - 2(2k-5)}{(k-2)} + \sum_{k=4}^n (\sqrt{3})^{k+2}$$

La primera sumatoria permite una factorización para posteriormente simplificar, mientras que la segunda corresponde a una P.G. de primer término $(\sqrt{3})^6$ y razón $r = \sqrt{3}$ y se nos pide la suma de $n - 4 + 1$ términos de ella. Así tenemos:

$$\sum_{k=1}^n \frac{(2k-5)(k-2)}{(k-2)} - \sum_{k=1}^3 \frac{(2k-5)(k-2)}{(k-2)} + \frac{(\sqrt{3})^6 (1 - (\sqrt{3})^{n-3})}{1 - \sqrt{3}} =$$

Al restar los 3 primeros términos de la sumatoria completa nos da la sumatoria que parte de 4 .

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^n (2k-5) - \sum_{k=1}^3 (2k-5) + \frac{(\sqrt{3})^6 (1-(\sqrt{3})^{n-3})}{1-\sqrt{3}} = \\
& 2 \sum_{k=1}^n k - \sum_{k=1}^n 5 - \left[2 \sum_{k=1}^3 k - \sum_{k=1}^3 5 \right] + \frac{(\sqrt{3})^6 (1-(\sqrt{3})^{n-3})}{1-\sqrt{3}} = \\
& 2 \frac{n(n+1)}{2} - 5n - [2(1+2+3) - 3 \cdot 5] + \frac{(\sqrt{3})^6 (1-(\sqrt{3})^{n-3})}{1-\sqrt{3}} = \\
& n^2 - 4n + 3 + \frac{(\sqrt{3})^6 (1-(\sqrt{3})^{n-3})}{1-\sqrt{3}}
\end{aligned}$$