Pontificia Universidad Católica de Valparaíso

Instituto de Matemáticas

Algebra Lineal, MAT 127.

Certamen Nº1

Miércoles 4 de Abril, 2007

1. (**15 puntos**) Determine, justificando adecuadamente, si las siguientes proposiciones son Verdaderas o Falsas.

a. Sean $A, B \in M_n(\mathbb{R})$, tal que la primera fila de la matriz A es nula, entonces la primera columna de la matriz AB es nula.

b. Si A es una matriz invertible de orden n y $B = \begin{pmatrix} A & A \\ A & A \end{pmatrix}$, entonces $|B| \neq 0$.

c. La matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ es la suma de una matriz simétrica con una antisimétrica.

d. Sea A una matriz regular de orden n, entonces $|adj(A)| = |A|^{n-1}$.

e. La matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & k-2 \\ 0 & k-1 & h+2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ tiene rango 2 sólo cuando $h = -1$ y $k = 0$.

2. (**15 puntos**) Considere la matriz $B \in M_2(\mathbb{R})$ tal que $B = (b_{ij})$ donde $b_{ij} = 2i + j$ para todo

$i, j = 1, 2$ y la matriz A dada por $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a. Determine los valores de m, n y p de modo que $\begin{pmatrix} m & -17 \\ 9 & n \\ 10 & p \end{pmatrix} = (B \bullet A)^T$.

b. Si $m = 1$, $n = 0$ y $p = -1$, obtenga la matriz X que satisface:

$$2\left((X \bullet A \bullet A^T)^T + \begin{pmatrix} 5-n & 2 \\ 5+m & p-4 \end{pmatrix} - X^T \right) = (2 \bullet B \bullet I_2)^{-1}.$$

donde I_2 es la matriz identidad de orden 2.

3. (**15 puntos**) Dada la siguiente matriz A:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 6 \\ 2 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

a. Pruebe que A es invertible.

b. Encuentre A^{-1} usando $O.E.F.$

4. (**15 puntos**) Sea $a, b \in \mathbb{R}$ y la matriz $A \in M_3(\mathbb{R})$ dada por:

$$A = \begin{pmatrix} a & b & 1 \\ 1 & ab & 1 \\ 1 & b & a \end{pmatrix}$$

Encuentre las condiciones de $a, b \in \mathbb{R}$, de modo que $|(A^{-1})^T| \neq 0.$

Notas:

- Tiempo: 90 minutos.
- Sea ordenado y claro en sus desarrollos. Justifique todas sus respestas.

Pauta Prueba1 de Algebra.

1) a) Falso. Ejm. $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 15 & 14 \end{pmatrix}$

b) Falso. En B necesariamente aparecen filas o columnas iguales.
Luego $|B| = 0$

c) Verdadero. $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & \frac{b+c}{2} \\ \frac{b+c}{2} & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \frac{b-c}{2} \\ \frac{c-b}{2} & 0 \end{pmatrix}$

d) Verdadero. $A^{-1} = \frac{1}{|A|}Adj(A)$ entonces $|A^{-1}| = \left| \frac{1}{|A|}Adj(A) \right| = \frac{1}{|A|^n} \left| Adj(A) \right|$
$\left| Adj(A) \right| = |A^{-1}||A|^n = |A|^{n-1}$

e) Verdadero. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & k-2 \\ 0 & k-1 & h+2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ es equivalente por filas a $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & k+h+1 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}$
luego $k = 0 \quad y \quad h = -1$

2) a)

$B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad BA = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 & 9 & 10 \\ -17 & 15 & 16 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} m & -17 \\ 9 & n \\ 10 & p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 & -17 \\ 9 & 15 \\ 10 & 16 \end{pmatrix}$ de donde $m = -11$; $n = 15$; $p = 16$

b) $2\left[AA^TX^T - X^T + \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 6 & -5 \end{pmatrix} \right] = \left[2\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \right]^{-1}$

$2\left[AA^T - I\right]X^T = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}^{-1} - 2\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 6 & -5 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 26 & 8 \\ 8 & 8 \end{pmatrix} X^T = \begin{pmatrix} \frac{-23}{2} & -3 \\ \frac{-43}{4} & \frac{37}{4} \end{pmatrix}$

$X^T = \begin{pmatrix} 26 & 8 \\ 8 & 8 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} \frac{-23}{2} & -3 \\ \frac{-43}{4} & \frac{37}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{24} & -\frac{49}{72} \\ -\frac{125}{96} & \frac{529}{288} \end{pmatrix}$

$X = \begin{pmatrix} -\frac{1}{24} & -\frac{125}{96} \\ -\frac{49}{72} & \frac{529}{288} \end{pmatrix}$

3) $A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 6 \\ 2 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad |A| = -3 \neq 0$ luego es invertible.

$\begin{pmatrix} 3 & -3 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ es equivalente por filas a $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-2}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 & -1 \end{pmatrix}$

al efectuar las OEF $F_{13}(-2)F_3(-1)F_{12}(1)F_{31}(-1)F_{21}(-2)F_1(\frac{1}{3})$

por lo que $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ \frac{-2}{3} & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & -1 \end{pmatrix}$

4) $|(A^{-1})^T| \neq 0$

$$|(A^{-1})^T| = |A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$$

basta que $|A| \neq 0$

$$\begin{vmatrix} a & b & 1 \\ 1 & ab & 1 \\ 1 & b & a \end{vmatrix} = b\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = b\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 0 & a-1 & 1-a \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = b\begin{vmatrix} a & 1 & 2 \\ 0 & a-1 & 0 \\ 1 & 1 & a+1 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} a & b & 1 \\ 1 & ab & 1 \\ 1 & b & a \end{vmatrix} = b(a-1)\begin{vmatrix} a & 2 \\ 1 & a+1 \end{vmatrix} = b(a-1)(a-1)(a+2)$$

las condiciones son $b \neq 0 \quad ; \quad a \neq 1 \quad ; \quad a \neq -2$