Pontificia Universidad
Católica de Valparaíso
Instituto de Matemáticas
Mayo de 2007

Pauta de Corrección
Prueba de Cátedra N°2 MAT-127
"Algebra Lineal"
1° Semestre 2007

1. Dado el sistema:

$$\begin{array}{l} x \quad my \quad z \quad 1 \\ m \quad 1\ x \quad 2my \quad 2z \quad 0 \\ x \quad my \quad m \quad 3\ z \quad -1 \end{array}$$

Encuentre los valores de m IR, si existen, para los cuales el sistema tiene infintas soluciones.

Determínelas y encuentre aquella solución cuya segunda componente sea igual a 7.

Solución:

La matriz asociad al sistema corresponde a:

$$\begin{pmatrix} 1 & m & 1 \\ m \quad 1 & 2m & 2 \\ 1 & m & m \quad 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & m & 1 \\ m \quad 1 & 2m & 2 \\ 1 & m & m \quad 3 \end{vmatrix} \quad -m^2 \quad 2m - m^3 \quad -m\ m - 1 \quad m \quad 2 \quad 0$$

luego $m \quad 0 \quad m \quad 1 \quad m \quad -2$

Si $m \quad 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ de donde } x \quad 2, z \quad -1$$

$S \quad 2, y, -1 \quad IR^3/y \quad IR$
Respuesta: $y \quad 7 \quad 2, 7, -1$

Si $m \quad 1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \end{pmatrix} \qquad S$$

Si $m \quad -2$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ -1 & -4 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -6 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad S$$

2. Sea $V \quad M_2 \; R$

$$U \quad \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad M_2 \; R \; /A \quad A^t \right\} \leq V$$

$$W \quad \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad M_2 \; R \; /A \quad A^t \quad tr \; A \quad 0 \right\}$$

a) Demuestre que $W \leq V$
Solución:

$W \quad V$ por definición

$W \neq 0$ pues $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad W$

Si $A, B \quad W; \quad IR$ por demostrar que $A \quad B \quad W$

$A \quad B \;^t \quad A^t \quad B^t$ pero $A, B \quad W \quad A \quad A^t$

$B \quad B^t$

y $tr\ A \quad B \quad a_{11} \quad a_{22} \quad b_{11} \quad b_{22}$

$tr\ A \quad tr\ B$

$A \quad B \quad W$

b)Encuentre una base para W. Demuestre

Solución:

$$U \quad \left\langle \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} / b \quad c \right\rangle \quad \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$W \quad \left\langle \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} / b \quad c \quad a \quad d \quad 0 \right\rangle \quad \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$B_W \quad \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$ genera i es l.i.

c)Calcule $\dim W$ y $\dim W \cap WU$

Solución:

$\dim W \quad 2$

$\dim U \quad 3$

$\dim W \cap U \quad 2$, es claro pues $W \quad U$

d)Encuentre, si es posible $id\ {}^{B_1}_{B}$ donde $B_1 \quad \left\{ \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \right\}$

Solución:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \quad \frac{1}{4} \quad 0$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad 1 \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \quad 1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \quad S$$

no existe pues $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad W$

3. Sea $V \quad P_3\ x$, considere que $W \leq V$ tal que:

$W \quad 1, x^2 \quad x, x \quad x^3, 3 \quad 2x \quad x^2 \quad x^3$ en $0, 1$
se define el producto interno de las siguiente forma:

$$p\ x\ , q\ x \qquad {}_0^1\ p\ x\ q\ x\ dx$$

Encuentre una base para W y orogonalìcela.
Solución:

$W \leq P_3\ x$
$W \quad 1, x^2 \quad x, x \quad x^3, 3 \quad 2x \quad x^2 \quad x^3$ en $0, 1$
$3 \quad 2x \quad x^2 \quad x^3 \quad 3 \quad 1 \quad 1 \quad x^2 \quad x \quad 1 \quad x \quad x^3$
$B_W \quad 1, x^2 \quad x, x \quad x^3$ es base pues genera y son l.i.

$$1 \qquad x^2 \quad x \qquad x \quad x^3 \qquad 0\ x$$
$$x \qquad x^2 \qquad x^3 \qquad 0\ x$$
$$0$$

$B_W \quad 1, v_2, v_3$

$$v_2 \quad x^2 \quad x - \frac{1 \quad x^2 \quad x}{1 \quad 1} \quad 1 \quad x^2 \quad x - \frac{5}{6}$$
$$v_3 \quad x^3 \quad x - \frac{1 \quad x^3 \quad x}{1 \quad 1} \quad 1 - \frac{\left(x^2 \quad x - \frac{5}{6}\right)\ x^3 \quad x}{\left(x^2 \quad x - \frac{5}{6}\right)\left(x^2 \quad x - \frac{5}{6}\right)} \quad \left(x^2 \quad x - \frac{5}{6}\right)$$
$$x^3 \quad x - \frac{3}{4} \quad 1 \quad \frac{9}{10}\left(x^2 \quad x - \frac{5}{6}\right)$$
$$x^3 \quad \frac{9}{10}x^2 \quad \frac{19}{10}x - \frac{3}{2}$$