Ejercicios

Álgebra Lineal MAT127

PUCV

1 Transformaciones Lineales

Ejercicio 1 *Sean* V *y* W *espacios vectoriales sobre* $\mathbb{K}$, $T : V \longrightarrow W$ *una transformación lineal y* $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ *una base de* V. *Demuestre que* $\mathrm{Im}(T) = \langle T(v_1), T(v_2), ..., T(v_n)\rangle$.

Ejercicio 2 *Sean* V *y* W *espacios vectoriales sobre* $\mathbb{K}$, $T : V \longrightarrow W$ *una transformación lineal inyectiva y* $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ *un subconjunto linealmente independiente de* V. *Demuestre que* $\{T(v_1), T(v_2), ..., T(v_n)\}$ *es un conjunto linealmente independiente de* W.

Ejercicio 3 *Sea* $T : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *una función definida por* $T(x, y, z, w) = (x + y, z - w, x + w)$.

1. *Verifique que* T *es una transformación lineal.*
2. *Encuentre el núcleo de* T *y determine* $\dim(\ker(T))$
3. *Encuentre la imagen de* T *y determine* $\dim(\mathrm{Im}(T))$.
4. *¿Es* T *inyectiva?, ¿Es* T *epiyectiva?. Justifique.*

Ejercicio 4 *Calcule, si existe, el valor de* $\lambda \in \mathbb{R}$ *para que la transformación lineal* $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *definido por* $T(x, y, z) = (\lambda x + 2y + z, \lambda x + y, y + z)$ *sea inyectiva.*

Ejercicio 5 *Sea* $T : M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}_3[x]$ *una función definida por*

$$T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a - c)x^3 + (b + d)x - a$$

1. *Demuestre que* T *es una transformación lineal.*
2. *Encuentre el núcleo de* T *y determine* $\dim(\ker(T))$.

3. *Encuentre la imagen de T y determine* $\dim(\operatorname{Im}(T))$.

4. *Determine si T es un isomorfismo. Justifique.*

5. *Determine si el núcleo de T es isomorfo a la imagen de T. Justifique.*

Ejercicio 6 *Sea $T : \mathbb{R}_2[x] \longrightarrow M_2(\mathbb{R})$ la función definida por* $T\left(ax^2 + bx + c\right) = \begin{pmatrix} b+c & a \\ 0 & 2c-a \end{pmatrix}$.

1. *Verifique que T es una transformación lineal.*

2. *Encuentre el núcleo y la imagen de T.*

3. *Determine* $\dim(\ker(T))$ *y* $\dim(\operatorname{Im}(T))$.

4. *Determine, si existen, las preimagenes de* $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ *y* $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 7 *Sea $T : M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}_2[x]$ la transformación lineal definida por* $T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ax^3 + ax^2 + cx + d$.

1. *Demuestre que T es una transformación lineal.*

2. *Encuentre la dimensión del núcleo de T.*

3. *Encuentre $n \in \mathbb{N}$, para la cual la imagen de T es isomorfo a $\mathbb{R}^n$.*

Ejercicio 8 *Sea $L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow M_2(\mathbb{C})$ la función definida por* $L(x,y,z) = \begin{pmatrix} x & x+iy \\ z & z+iy \end{pmatrix}$

1. *Demuestre que L es una $\mathbb{R}$-transformación lineal.*

2. *Encuentre el núcleo de L y determine* $\dim(\ker(L))$.

3. *Encuentre la imagen de L y determine* $\dim(\operatorname{Im}(L))$.

4. *¿Es L inyectiva?, ¿es L epiyectiva?. Justifique.*

Ejercicio 9 *Sea $T : \mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathbb{C}^3$ la única $\mathbb{C}-$transformación lineal tal que $T(e_1) = (1,0,i)$, $T(e_2) = (0,1,1)$ y $T(e_3) = (i,1,0)$, donde $\{e_1, e_2, e_3\}$ es la base canónica de $\mathbb{C}^3$.*

1. *Encuentre $T(x,y,z)$ para todo $(x,y,z) \in \mathbb{C}^3$.*

2. *Encuentre la imagen de T y determine* $\dim(\operatorname{Im}(T))$.

3. *Calcule* $\dim_{\mathbb{C}}(\ker(T))$.

4. *Determine si T es un isomorfismo. Justifique.*

Ejercicio 10 *Sea* $\lambda \in \mathbb{R}$ *y* $T_\lambda : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *la transformación lineal definida por* $T_\lambda (x, y, z) = (\lambda x - y + z, x + y - 2z, x - y + z)$.

1. *Según los valores de* $\lambda \in \mathbb{R}$, *determine la dimensión del núcleo de* T_λ.
2. *Según los valores de* $\lambda \in \mathbb{R}$, *determine condiciones para* $a, b, c \in \mathbb{R}$, *para que* $(a, b, c) \in \mathrm{Im}(T_\lambda)$.
3. *Para* $\mu \in \mathbb{R}$, *determine la preimagen de* $(1, \mu, 0)$ *bajo* T_1.

Ejercicio 11 *Sean* V, W *espacios vectoriales sobre* $\mathbb{R}$ *tales que* $\dim(V) = \dim(W) = 3$, $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ *y* $B' = \{u_1, u_2, u_3\}$ *bases de* V *y* W, *respectivamente. Sea* $T : V \longrightarrow W$ *la transformación lineal definida por*

$$\begin{aligned} T(v_1) &= u_1 + u_2 - u_3, \\ T(v_2) &= u_1 + u_3, \\ T(v_3) &= 2u_1 + u_2. \end{aligned}$$

1. *Determine* $T(v)$, *para todo* $v \in V$.
2. *Encuentre el núcleo de* T *y determine* $\dim(\ker(T))$.
3. *Encuentre la imagen de* T *y determine* $\dim(\mathrm{Im}(T))$.
4. *Determine si* T *es un isomorfismo. Justifique.*

Ejercicio 12 *Determine si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifique su respuesta.*

1. *Si* $T : V \longrightarrow W$ *una* $\mathbb{K}$*-transformación lineal y* U *es un subespacio vectorial de* V *entonces* $T(U) = \{T(u) : u \in U\}$ *es un subespacio vectorial de* W.
2. *Si* $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *es una función definida por* $T(x, y) = (x, 2y, 3)$ *entonces* T *es una transformación lineal epiyectiva.*
3. *Si* $T : C([0, 1], \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ *está definida por* $T(f) = f(0)$, *para todo* $f \in C([0, 1], \mathbb{R})$ *entonces* T *es una transformación lineal inyectiva.*
4. *Si* $T : V \longrightarrow W$ *es una transformación lineal tal que* $\dim(W) < \dim(V)$ *entonces* T *no es epiyectiva.*
5. *Si* $T : \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ *es una transformación lineal, entonces existe* $v \in \mathbb{R}^5$, $v \neq 0$ *tal que* $T(v) = 0$.
6. *Si* $T : V \longrightarrow W$ *es una transformación lineal tal que* $\dim(W) = 3$ *y* $\dim(V) = 2$, *entonces* T *no es epiyectiva.*
7. *Si* $T : \mathbb{C}^6 \longrightarrow M_2(\mathbb{C})$ *es una* $\mathbb{C}-$*transformación lineal entonces el núcleo de* T *es diferente del espacio nulo.*

8. *Si* $U = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y=0\right\}$ *entonces* U *es isomorfo a* $\mathbb{R}^2$.

9. *Si* $\dim(V) = \dim(W)$ *entonces existe* $T : V \longrightarrow W$ *un isomorfismo.*

10. *Si* $T : V \longrightarrow W$ *es un isomorfismo y* $\{v_1, ..., v_n\}$ *es una base de* V *entonces* $\{Tv_1, ..., Tv_n\}$ *es una base de* W.

Ejercicio 13 *Sean* V *y* W *espacios vectoriales sobre* $\mathbb{K}$. *Demuestre que* $L(V,W)$ *es un espacio vectorial sobre* $\mathbb{K}$.

Ejercicio 14 *Sea* V *espacio vectoriale sobre* $\mathbb{K}$ *y* $T \in L(V,V)$ *tal que* $T^2 + 2T + I = 0$. *Demuestre que* T *es invertible.*

Ejercicio 15 *Sea* V *espacio vectoriale sobre* $\mathbb{K}$ *tal que* $\dim(V) = n < \infty$. *Demuestre que* $L(V,\mathbb{K})$ *es isomorfo a* $\mathbb{K}^n$.

Ejercicio 16 *Sean* $f_1^*,\ f_2^* \in L\left(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}\right)$ *definidos por* $f_1^*(x,y) = \dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{2}$ *y* $f_2^*(x,y) = -\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{2}$. *Verifique que* $\{f_1^*, f_2^*\}$ *es una base de* $L\left(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}\right)$.

Ejercicio 17 *Sean* $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in L(\mathbb{R}_2[x], \mathbb{R})$ *definidos por*

$$\begin{aligned} \varphi_1(p(x)) &= \int_0^1 p(x)\,dx \\ \varphi_1(p(x)) &= p'(1) \\ \varphi_1(p(x)) &= p(0) \end{aligned}$$

Demuestre que $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ *es una base de* $L(\mathbb{R}_2[x], \mathbb{R})$.

Ejercicio 18 *Sea* V *un espacio vectorial sobre* $\mathbb{K}$ *y* W *un subconjunto no vacio de* V. *Verifique que* $W^o = \{\varphi \in L(V,\mathbb{K}) : \varphi(w) = 0,\ \forall w \in W\}$ *es un subespacio vectorial de* $L(V,\mathbb{K})$.

2 Matriz Asociada a una Transformación Lineal.

Ejercicio 19 *Sea* $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *la transformación lineal definida por:*

$$T(x,y,z) = (x-3y+z, 2x-z, -y+z)$$

1. *Encuentre* $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}_3}$, *donde* $\mathcal{B} = \{(1,0,0),(1,1,0),(2,1,1)\}$ *y* $\mathcal{C}_3$ *es la base canónica de* $\mathbb{R}^3$.
2. *Verifique si* T *es un isomorfismo, y calcule* $T(x,y,z)$, *para todo* $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

Ejercicio 20 *Sea* $U = \left\{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : x+y-z+w=0\right\}$ *y considere la base de* U *definida por* $\mathcal{B} = \{(1,0,1,0),(0,1,1,0),(0,0,1,1)\}$ *y* $T:U \to \mathbb{R}^3$ *la transformación lineal tal que* $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, *donde* $\mathcal{B}' = \{(1,2,1),(1,-1,1),(1,0,-1)\}$.

1. *Determine* $T(x,y,z,w)$, *para todo* $(x,y,z,w) \in U$.
2. *Determine* $k \in \mathbb{R}$, *si existe, de modo que* $(k,1,-k)$ *tenga preimagen bajo* T.

Ejercicio 21 *Sean* V *un espacio vectorial sobre* $\mathbb{R}$ *de todas las funciones* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *que admiten derivadas de orden 2 sobre* $\mathbb{R}$ *y* $W = \langle u,v,w\rangle$ *el subespacio de* V *generado por las funciones* u,v,w *tales que para todo* $t \in \mathbb{R}$, $u(t)=1, v(t)=t, w(t)=e^t$ *y* $L:W\to W$ *la transformación lineal definida por:*

$$L(f) = f'' + 3f'$$

1. *Encuentre* $[L]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$, *donde* $\mathcal{B} = \{u,v,w\}$.
2. *Determine si* L *es invertible. Justifique.*

Ejercicio 22 *Sea* $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_1[x]$ *la transformación lineal definida por* $T(a,b) = a-b+ax$, *para todo* $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ *y* $\mathcal{B}'$ *la base de* $\mathbb{R}_1[x]$ *dada por* $\mathcal{B} = \{1, 1-x\}$. *Encuentre una base* $\mathcal{B}$ *de* $\mathbb{R}^2$ *tal que la matriz asociada a* T *respecto de las bases* $\mathcal{B}$ *y* $\mathcal{B}'$ *es* $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 23 *Sea* $T:\mathbb{R}^4 \to M_2(\mathbb{R})$ *la transformación lineal definida por*

$$T(x,y,z,t) = \begin{pmatrix} x+y & z-t \\ x+t & 0 \end{pmatrix}$$

Encuentre bases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ bases de $\mathbb{R}^4$ y $M_2(\mathbb{R})$, respectivamente, tales que:

$$[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 24 *Sea $L : \mathbb{R}^3 \to M_2(\mathbb{R})$ la transformación lineal tal que*

$$[L]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

donde $\mathcal{B} = \{(1,0,1), (2,1,-1), (1,1,1)\}$ y $\mathcal{C}$ es la base canónica de $M_2(\mathbb{R})$.

1. *Encuentre el núcleo de L.*
2. *Encuentre una base para la imagen de L.*
3. *¿Es L un isomorfismo?. Justifique.*

Ejercicio 25 *Sean $V = \mathbb{C}_2[x]$ y $T : V \to \mathbb{C}^3$ la $\mathbb{C}$- transformación lineal tal que*

$$[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}_3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & i & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

donde $\mathcal{B} = \{1, ix, x^2 - 1\}$ y $\mathcal{C}_3$ es la base canónica de $\mathbb{C}^3$(como espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$).

1. *Verifique que T es un isomorfismo y encuentre $\left[T^{-1}\right]_{\mathcal{C}_3}^{\mathcal{B}}$*
2. *Calcule $T^{-1}(a,b,c)$, para todo $(a,b,c) \in \mathbb{C}^3$.*

Ejercicio 26 *Sea $L : R_2[x] \to \mathbb{R}_3[x]$ la transformación lineal dada por*

$$L(p(x)) = \int_{-x}^{x} p(t)\, dt$$

1. *Encuentre el núcleo y la imagen de L.*
2. *¿Es L un isomorfismo?. Justifique.*
3. *Dadas las bases $\mathcal{B} = \{x^2, x^2 + x, x^2 + x + 1\}$ y $\mathcal{C} = \{x^2, x^2 + x, x^2 + x + 1, x^3\}$. Encuentre $[L]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$.*

Ejercicio 27 *Considere las siguientes bases de* $\mathbb{R}^3$.

$$\mathcal{B} = \{(1,2,3), (0,1,0), (1,1,0)\} \text{ y } \mathcal{B} = \{(1,1,0), (0,1,1), (1,0,1)\}$$

y la base de $\mathbb{R}^2$, $\mathcal{B}'' = \{(2,1), (0,-1)\}$. *Sean* $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *y* $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ *transformaciones lineales tales que* $T(1,2,3) = (0,0,7)$, $T(0,1,0) = (0,2,0)$ *y* $T(1,1,0) = (1,1,1)$ *y* $[S]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}''} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$. *Encuentre* $[S \circ T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}''}$.

Ejercicio 28 *Sean* $\mathcal{B} = \{(1,-1,0), (0,-1,2)\}$, $\mathcal{C} = \{(1,-2,2), (3,-5,4)\}$ *y* $W = \langle (1,-1,0), (0,-1,2) \rangle$.

1. *Demuestre que* $\mathcal{B}$ *y* $\mathcal{C}$ *son bases para* W.
2. *Si* $u = (x,y,z) \in W$, *calcule* $[u]_{\mathcal{B}}$, $[u]_{\mathcal{C}}$ *y* $[I_{\mathbb{R}^3}]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$.
3. *Encuentre las coordenadas en ambas bases (si es posible, de lo contrario, justifique) de los vectores siguientes:* $(1,0,0)$ *y* $(4,-7,6)$.

Ejercicio 29 *Considere las bases* $\mathcal{B} = \left\{i, x+i, (x+i)^2\right\}$ *y* $\mathcal{B}' = \left\{ix, x-i, x^2\right\}$ *para* $V = \mathbb{C}_2[x]$.

1. *Encuentre* $[I_V]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$.
2. *Encuentre* $p(x)$ *tal que* $[p(x)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ -i \end{pmatrix}$.
3. *Determine* $[p(x)]_{\mathcal{B}'}$ *para* $p(x)$ *definido en* (11.2).

Ejercicio 30 *Sean* V *un espacio vectorial sobre* $\mathbb{K}$ *tal que* $\dim_{\mathbb{K}}(V) = 3$, $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ *base de* V, *y sean*

$$\begin{aligned} u_1 &= v_1 + 2v_2 + 3v_3, \\ u_2 &= 2v_1 - v_2 + v_3 \\ u_3 &= -v_1 + v_2 - 3v_3 \end{aligned}$$

1. *Demuestre que* $\mathcal{B}' = \{u_1, u_2, u_3\}$ *es base de* V.
2. *Encuentre* $[I_V]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}$.
3. *Si* $v = u_1 + \frac{1}{2}u_2 - \frac{1}{3}u_3$, *encuentre* $[v]_{\mathcal{B}}$.

Ejercicio 31 *Sean* $V = \mathbb{C}_2[x]$ *y* $T : V \to V$ *la* $\mathbb{C}$- *transformación lineal tal que:*

$$[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donde $\mathcal{B} = \left\{1 + ix^2, i + x, 1\right\}$

1. *Calcule* $T(1+ix)$.

2. *Determine* $[I_V]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ *donde* $\mathcal{B}' = \{ix, x-i, x^2\}$

3. *Use* (13.2) *para determinar la matriz asociada de* T *en las bases* $\mathcal{B}$ *y* $\mathcal{B}'$.

Ejercicio 32 *Sean* $V = \mathbb{R}_2[x]$, $\mathcal{B} = \{1, x+1, x^2\}$, $\mathcal{C}$ *la base canónica de* $M_2(\mathbb{R})$ *y* $T : V \to M_2(\mathbb{R})$ *la transformación lineal tal que:*

$$[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. *Si* $\mathcal{C}' = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$, *y* $\mathcal{B}'$ *es la base canónica de* $\mathbb{R}_2[x]$, *determine las matrices cambio de base de* $\mathcal{C}$ *a* $\mathcal{C}'$ *y de* $\mathcal{B}$ *a* $\mathcal{B}'$.

2. *Use* (14.1) *para calcular la matriz asociada a* T *en las bases* $\mathcal{B}'$ *y* $\mathcal{C}'$.

Ejercicio 33 *Sean* V *y* W *espacios vectoriales sobre* $\mathbb{C}$ *tales que* $\dim_{\mathbb{C}}(V) = \dim_{\mathbb{C}}(W)$, $\mathcal{B}$ *base de* V, $\mathcal{C} = \{w_1, w_2, w_3\}$ *base de* W *y* $\mathcal{C}' = \{w_2, w_1 + w_3, -w_1\}$. *Suponga que el vector de coordenadas de* $v \in V$ *en la base* $\mathcal{B}$ *está dado por* $[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$. *Si* $T : V \to W$ *es un isomorfismo tal que*

$$\left[T^{-1}\right]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

determine los valores de α, β, γ *de modo que* $[T(v)]_{\mathcal{C}'} = \begin{pmatrix} -i \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 34 *Sean* $A, B \in M_n(\mathbb{K})$. *Demuestre que si* A *es invertible, entonces* AB *es semejante a* BA.

Ejercicio 35 *Sea* $\sim$ *la relación en* $M_n(\mathbb{K})$ *definida por*

$$A \sim B \iff A \text{ es semejante a } B.$$

Demuestre que $\sim$ *es una relación de equivalencia en* $M_n(\mathbb{K})$.