PONTIFICIA UNIVERSIDAD
CATOLICA
DE VALPARAISO

INSTITUTO DE MATEMÁTICA

PRUEBA Nº3 DE MAT 213-01-02-03-04-05-06

CURSO: Álgebra Lineal **FECHA: 26/Julio/08** **TIEMPO: 90 min.**
UNIDADES : Nº3. Transformaciones Lineales.
PROFESORES : M. Astudillo; E. Avilés; G. Figueroa; A. Morales; M. Parraguez.
ÚTILES : De escritorio.

INDICACIONES :

1. **Lea cuidadosamente la prueba antes de comenzar a responder.**
2. **La comprensión de los enunciados es parte de la prueba.**
3. **Desarrolle su prueba con lápiz pasta azul o negro. Si escribe con lápiz grafito pierde su derecho a recorrección.**
4. **No se puede usar corrector. Si se equivoca debe tarjar el error.**
5. **Resuelva su prueba en forma clara y ordenada, justificando adecuadamente sus desarrollos.**
6. **Use UNA hoja para desarrollar cada pregunta.**

PREGUNTAS

Pregunta 1: (30 puntos; 10 puntos cada una)

a) Sea $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal definida para todo $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ por: $T(x,y,z)=(x+z, 2z, y-z)$.

Determine:

i) $[T]_C$, donde C es la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

ii) ¿T es un isomorfismo?

iii) $T^{-1}(x,y,z)$, para todo $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$

b) Dada la transformación lineal $f:\mathbb{R}^3 \to M_{3\times 1}(\mathbb{R})$, definida por: $f(x,y,z)=\begin{pmatrix} x-y \\ 2x+y-z \\ x+2y-z \end{pmatrix}$, para todo $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$.

Determinar:

i) Una base para $Ker(f)$ y $Nul(f)$.

ii) Una base para $\operatorname{Im}(f)$ y $Rg(f)$.

c) Sea $T\in L\left(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^3\right)$ tal que: $T(x,y)=(x-y,\, y-x,\, 2x-2y)$.

Determine:

i) El conjunto de las preimágenes del vector $(1,-1,2)$.

ii) ¿T es inyectiva?

iii) ¿T es epiyectiva?.

Pregunta 2: (18 puntos; 9 puntos cada una)

a) Determinar una trasformación lineal f de $\mathbb{R}_2[x]$ en $\mathbb{R}^3$, de modo que: $Ker(f)=\left\langle x^2+x+1\right\rangle$ y además $f(x+1)=(-1,0,1)$, $f(1)=(0,-1,1)$.

b) Sean $C=\{1,x\}$, $B=\left\{1,\, x+1,\, x^2+x\right\}$ bases de $\mathbb{R}_1[x]$ y $\mathbb{R}_2[x]$ respectivamente y $T:\mathbb{R}_1[x]\to\mathbb{R}_2[x]$ una transformación lineal tal que: $[T]_C^B=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Encuentre $T(p(x))$, para todo $p(x)\in\mathbb{R}_1[x]$

Pregunta 3: (12 puntos; 4 puntos cada una)

Determine si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas. Demuestre aquellas que sean verdaderas o dé un contraejemplo para aquellas que sean falsas.

a) Sea $T_\lambda\in L\left(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^2\right)$ tal que $T_\lambda(x,y)=(\lambda x+y,\, -2\lambda y+x)$ para $\lambda\in\mathbb{R}$, entonces T_λ es inyectiva cuando $\lambda\in\mathbb{R}-\left\{-\sqrt{2},\sqrt{2}\right\}$.

b) Sea $T:V\to W$ transformación lineal, entonces $\vec{0}\in Ker(T)$.

c) Sea $T:M_n(\mathbb{R})\to\mathbb{R}$, definida por $T(A)=rango(A)$ para toda $A\in M_n(\mathbb{R})$, entonces T es lineal.