PAUTA PRUEBA 1 - MAT 213-1-2-3-4-5-6

Pregunta 1: (20 puntos; 5 ptos. c/u)

(a) VERDADERA

$|A| = |A^2| = |A|^2$, luego

$$(|A| - |A|^2 = 0) \Rightarrow (|A|(1 - |A|) = 0) \Rightarrow \big(|A| = 0 \ \vee\ 1 - |A| = 0\big) \Rightarrow \big(|A| = 0 \ \vee\ |A| = 1$$

(b) VERDADERA

$A \bullet (Aj(A)) = |A| \bullet I_n$

pero, A no es invertible, entonces $|A| = 0$

Luego, $A \bullet (Adj(A)) = |A| \bullet I_n = 0 \bullet I_n = 0_n$

(c) FALSA

$B = AA^t \Rightarrow B^{-1} = (AA^t)^{-1} = (A^t)^{-1}A^{-1} = (A^{-1})^t A^{-1}$

luego $B^{-1} = (A^{-1})^t A^{-1}$

$$A^{-1} = \tfrac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{-2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

Por lo tanto,

$$B^{-1} = (A^{-1})^t A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{-2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} \frac{-1}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{-2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{-1}{5} \\ \frac{-1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

(d) FALSA

Sea $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ de donde $A = P^{-1}MP$. Luego

$A^{52} = (P^{-1}MP)^{52} = P^{-1}M^{52}P.$

Pero $M^2 = I_2$, de donde $M^{52} = (M^2)^{26} = (I_2)^{26} = I_2.$

Luego, $A^{52} = P^{-1} \bullet I_2 \bullet P = P^{-1} \bullet P = I_2$

Pregunta 2: (15 puntos)

De las relaciones $B(X+I_3) = B^{-1}(AB)$ y $AB = B^2 + B + I_3$ se deduce que

$X + I_3 = B^{-1}B^{-1}(AB) = B^{-2}(B^2 + B + I_3) = I_3 + B^{-1} + B^{-2}$

es decir,

$$X = B^{-1} + B^{-2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^2 =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 8 & 2 & -4 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pregunta 3: (25 puntos)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & a \end{vmatrix} = 5 - a$$

i) Tiene única solución si y sólo si $|A| \neq 0$,

es decir: $a \in \mathbb{R} - \{5\}$ y $b \in \mathbb{R}$.

En tal caso el valor de $z = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & b \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}}{5-a} = \frac{2b-2}{5-a}$

ii) Sea $a = 5$, entonces: $(A|B) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 2b-3 \\ 0 & 1 & 2 & 2-b \\ 0 & 0 & 0 & 2-2b \end{array}\right)$

de donde el sistema tiene infinitas soluciones si y sólo si

$a = 5$ y $b = 1$.

En tal caso el conjunto solución es: $S = \{(-1+t, 1-2t, t)/t \in \mathbb{R}\}$.

iii) El sistema es inconsistente si y sólo si $a = 5$ y $b \in \mathbb{R} - \{1\}$.