PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE VALPARAÍSO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA

PAUTA PRUEBA Nº3 DE MAT 213-01-02-03-04-05-06

CURSO: Álgebra Lineal **FECHA: 23/06/07** **TIEMPO: 90 min.**

UNIDADES : Nº3 . Trasformaciones Lineales.
Nº4. Diagonalización.
PROFESORES : L. Aburto; J. León; M. Parraguez; S. Pascual; P. Valdés.
ÚTILES : De escritorio.

PREGUNTA 1: (20 puntos; 5 puntos cada una)

(a) FALSO

Por ejemplo si $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(x,y)=(x,0)$, la cual es lineal. Ahora si $u=(0,1)$ entonces $T(u)=(0,0)$ pero $u \neq (0,0)$

(b) VERDADERO

α es valor propio de de T, entonces $T(v)=\alpha v$, aplicando T^{-1} obtenemos: $T^{-1}(T(v))=T^{-1}(\alpha v)$, es decir: $v=\alpha T^{-1}(v)$. Ahora α es invertible, pues de lo contrario $v \in \ker(T)$ con $v \neq \vec{0}$ y T ya no sería invertible. Luego $\alpha^{-1}v=T^{-1}(v)$.

(c) FALSO

$$\left[T^2\right]_B^B=\left([T]_B^B\right)^2=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 6 & 11\end{pmatrix}.$$

(d) VERDADERO

T es lineal, entonces Im(T) es subespacio vectorial.

PREGUNTA 2: (20 puntos)

(a) $(2,1) \in \ker(T)$ si y sólo si $T(2,1) = (0,0,0)$. Pero por definición

$T(2,1) = (0,4+t,0)$, de donde $(2,1) \in \ker(T)$ si y sólo si $t = -4$.

Ahora para $t = -4$ tenemos que la matriz asociada al sistema homogéneo es:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Luego: $\ker(T) = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 / x = 2y \right\} = \left\langle (2,1) \right\rangle$

Por lo tanto una base para $\ker(T)$ es $\left\{ (2,1) \right\}$.

(b) $(1,2,-1) \in \operatorname{Im}(T)$ si y sólo si existe $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tal que $T(x,y) = (1,2,-1)$ si y sólo si el sistema lineal representado por la matriz aumentada $\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 2 & 1 \\ 2 & t & 2 \\ 1 & -2 & -1 \end{array}\right)$ tiene solución. Como $\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 2 & 1 \\ 2 & t & 2 \\ 1 & -2 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 4+t & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$. Como este último sistema tiene solución si y sólo si $t \neq -4$, entonces:

$$(1,2,-1) \in \operatorname{Im}(T) \text{ si y sólo si } t \in \mathbb{R} - \left\{ -4 \right\}$$

PREGUNTA 3: (20 puntos)

El polinomio característico de A: $p(x) = x^2 - (\lambda + 2)x + 2\lambda$.

De donde los valores propios de A son: λ y 2

$V(\lambda)$: espacio propio asociado a λ

$$A - \lambda I_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ \lambda - 1 & 1 - \lambda \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Luego:

$$V(\lambda) = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 / x = y \right\} = \left\langle (1,1) \right\rangle$$

$V(2)$: espacio propio asociado a 2.

$$A - 2I_2 = \begin{pmatrix} \lambda - 1 & -1 \\ \lambda - 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \lambda - 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Luego:

$$V(2) = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 / (\lambda - 1)x = y \right\} = \left\langle (1, \lambda - 1) \right\rangle$$

Entonces:

(a) Si $\lambda \neq 2$ se tiene que A es diagonalizable.
Si $\lambda = 2$ se tiene que $\dim(V(2)) = 1 \neq 2$, por lo tanto en este caso A no es diagonalizable.

En conclusión A es diagonalizable si y sólo si $\lambda \in \mathbb{R} - \{2\}$

(b) Por (a), se tiene que $\{(1,1), (1, \lambda - 1)\}$ es una base de $\mathbb{R}^2$ formada de vectores propios de A. Luego si:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \lambda - 1 \end{pmatrix}$$

Se tiene que: $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$