PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE VALPARAÍSO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA

PAUTA PRUEBA Nº2 DE MAT 213-01-02-03-04-05-06

CURSO: Álgebra Lineal **FECHA: 26/05/07** **TIEMPO: 90 min.**

UNIDADES : Nº2 .Espacios Vectoriales Reales.
PROFESORES : L. Aburto; J. León; M. Parraguez; S. Pascual; P. Valdés.
ÚTILES : De escritorio.

PREGUNTA 1: (21 puntos; 7 puntos cada una)

(a) VERDADERO

Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tales que: $\alpha(1,a,1)+\beta(1,c,1+b)=(0,0,0)$, es decir:

(1) $\alpha+\beta=0$

(2) $\alpha a+\beta c=0$

(3) $\alpha+\beta(1+b)=0$

En particular de (1) y (3) se deduce que $\alpha=\beta=0$ pues $b\neq 0$

(b) FALSO

$$2\left(x+2x^2\right)+5\left(-1+x+x^2\right)=-5+7x+9x^2\neq -5+7x-x^2$$

(c) FALSO

Si $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, entonces $A\in W$ si y solo si $A+A^t=0$, es decir

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, es decir: $a=d=0$ y $c=-b$.

Luego, $\dim(W)=1$

PREGUNTA 2: (14 puntos)

a) (*i*) $W \subseteq \mathbb{R}_3[x]$

(ii) $W \neq \emptyset$, pues $0 \in W$

(iii) Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ con $d - a + c = 0$ y $q(x) = a'x^3 + b'x^2 + c'x + d'$ con $d' - a' + c' = 0$ y se tiene que:

$$\alpha p(x) + \beta q(x) = \alpha\left(ax^3 + bx^2 + cx + d\right) + \beta\left(a'x^3 + b'x^2 + c'x + d'\right) =$$

$= (\alpha a + \beta a')x^3 + (\alpha b + \beta b')x^2 + (\alpha c + \beta c')x + (\alpha d + \beta d')$ y

$\alpha d + \beta d' - \left((\alpha a + \beta a') + (\alpha c + \beta c')\right) = 0$. Luego $\alpha p(x) + \beta q(x) \in W$.

De (i), (ii) y (iii) tenemos que W es un subespacio de $\mathbb{R}_3[x]$

b) Como:

$q(x) \in W$ ssi $q(x) = (d + c)x^3 + bx^2 + cx + d = d\left(x^3 + 1\right) + c\left(x^3 + x\right) + b\left(x^2\right)$

y $\left\{x^3 + 1, x^3 + x, x^2\right\}$ es un conjunto linealmente independiente, se tiene $\left\{x^3 + 1, x^3 + x, x^2\right\}$ es base para W y por lo tanto $\dim(W) = 3$

PREGUNTA 3: (25 puntos)

(a) Sean:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad v_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad v_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Supongamos que:

$$av_1 + bv_2 + cv_3 + dv_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ con } a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

Entonces la relación anterior se representa matricialmente por:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Por reducción se tiene que:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Luego B no es linealmente independiente, pues el rango de la matriz anterior no es 4.

(b) Sí efectivamente B genera un subespacio vectorial de dimensión 2, por (a).

(c) Efectivamente el subespacio $\langle B \rangle$ es el que se indica. Pues si:

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$, entonces $A \in W$ ssi $\exists x, y, z, w \in \mathbb{R}$ tales que

$xv_1 + yv_2 + zv_3 + wv_4 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, es decir el sistema lineal representado por

la matriz $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & a \\ 1 & 0 & -1 & 1 & b \\ 0 & 1 & 2 & -1 & c \\ 1 & 1 & 1 & 1 & d \end{array}\right)$ es consistente. Luego por reducción se

tiene: $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & a \\ 1 & 0 & -1 & 1 & b \\ 0 & 1 & 2 & -1 & c \\ 1 & 1 & 1 & 1 & d \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 & b \\ 0 & 1 & 2 & -1 & a-b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -a+b+c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d-a \end{array}\right)$

Es decir: $a = b + c$ y $d = a$

Luego, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b+c & b \\ c & b+c \end{pmatrix}$

(d) Por (c) una base para W es $B_1 = \{v_1, v_2\}$. Entonces

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b+c & b \\ c & b+c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a-b-c & 0 \\ 0 & d-b-c \end{pmatrix}$$

Es inmediato que esta última expresión es única para A.

Luego basta considerar $U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$, es decir, el subespacio

vectorial de las matrices diagonales.