PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE VALPARAÍSO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA

PAUTA PRUEBA 1 DE MAT 213-01-02-03-04-05

CURSO: Álgebra Lineal FECHA: 8/09/07 TIEMPO: 90 min.
UNIDADES : Nº1. Matrices y Sistemas de Ecuaciones Lineales.
PROFESORES : A. Cabrera; M. Parraguez; R. Salazar; H. Soto; C. Torrealba.
ÚTILES : De escritorio.

PREGUNTA 1: (20 puntos; 5 puntos cada una)

a) FALSO

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, entonces: $|-A| = \left| -\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -4 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2$

pero, $-|A| = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -(-2) = 2$. Luego $|-A| \neq -|A|$.

b) FALSO

Notar que: $F_2\ F_1\ A\ C_1 = I_3$; donde:

$F_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $F_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ y $C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ son regulares; por lo

tanto: $A = (C_1 F_2 F_1)^{-1}$; es decir, $A^{-1} = C_1 F_2 F_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

c) FALSO

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, entonces

$(AB)^2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 7 & 9 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ y $A^2B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

Luego: $(AB)^2 \neq A^2B^2$.

d) VERDADERO

Todas las n-upla $\left(x_1, x_2, ..., x_n\right) \in \mathbb{R}^n$ son solución del sistema $0_{n\times n} X_{n\times 1} = 0_{n\times 1}$.

PREGUNTA 2: (15 puntos)

$$(XB)^{-1}\left(BA^t\right)^t - 3B^{-1}X^{-1}B^t = B^t$$

$$\left(B^{-1}X^{-1}\right)\left(AB^t\right) - 3B^{-1}X^{-1}B^t = B^t$$

$$B^{-1}X^{-1}(A - 3I_2)B^t = B^t \qquad /\left(B^t\right)^{-1} \text{ existe pues } \left|B^t\right| = 1 \neq 0$$

$$B^{-1}X^{-1}(A - 3I_2) = I_2 \qquad /(A - 3I_2)^{-1} \text{ existe pues } \left|(A - 3I_2)\right| = -12 \neq 0$$

$$B^{-1}X^{-1} = I_2(A - 3I_2)^{-1}$$

$$B^{-1}X = (A - 3I_2)^{-1} \qquad /\left(B^{-1}\right)^{-1} = B \text{ existe pues } \left|B^{-1}\right| = 1 \neq 0$$

$$X^{-1} = B(A - 3I_2)^{-1}$$

$$X = (A - 3I_2)B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 25 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$$

PREGUNTA 3: (25 puntos)

$$\blacktriangle = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & k & 6 \\ -1 & 3 & k-3 \end{vmatrix} = k(k+4)$$

(a) El sistema tiene única solución para $k \in \mathbb{R} - \{-4,0\}$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 6 & 6 \\ -1 & 0 & k-3 \end{vmatrix}}{\blacktriangle} = \frac{4k}{k(k+4)} = \frac{4}{k+4}$$

(b) Si $k = 0$

$$(A/b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 6 & 6 \\ -1 & 3 & -3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} z = t \in \mathbb{R} \\ x = 3-3t \\ y = 1 \end{array}$$

Si $k = 0$ el sistema tiene **Infinitas Soluciones** y es el conjunto solución es:

$$S = \{(3-3t, 1, t)/t \in \mathbb{R}\} = \{(3,1,0) + (-3,0,1)/t \in \mathbb{R}\}$$

(c) Si $k = -4$

$$(A/b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & -4 & 6 & 6 \\ -1 & 3 & -7 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -4 & 1 \end{array}\right)$$

Si $k = -4$ el sistema **No tiene solución**.