PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE VALPARAISO

INSTITUTO DE MATEMÁTICA

PAUTA PRUEBA Nº3 DE MAT 213-01-02-03-04-05-06

CURSO: Álgebra Lineal **FECHA: 26/Julio/08** **TIEMPO: 90 min.**
UNIDADES : Nº3. Transformaciones Lineales.
PROFESORES : M. Astudillo; E. Avilés; G. Figueroa; A. Morales; M. Parraguez.
ÚTILES : De escritorio.

PREGUNTAS

Pregunta 1: (30 puntos; 10 puntos cada una)

a)

i) $[T]_C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

ii) T es un isomorfismo, porque $\det\left([T]_C\right) = -2 \neq 0$

iii) $\left[T^{-1}(x,y,z)\right]_C = \left[T^{-1}\right]_C \left[(x,y,z)\right]_C =$

$$= \left([T]_C\right)^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - \frac{1}{2}y \\ \frac{1}{2}y + z \\ \frac{1}{2}y \end{pmatrix}$$

Así, $T^{-1}(x,y,z) = \left(x - \frac{1}{2}y, \ \ \frac{1}{2}y + z, \ \ \frac{1}{2}y \right)$

b) i) $Ker(f)=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,/\, (x-y,\ 2x+y-z,\ x+2y-z)=(0,0,0)\right\}$

$$\left.\begin{array}{r} x-y=0\\ 2x+y-z=0\\ x+2y-z=0\end{array}\right| \Rightarrow \begin{pmatrix}1&-1&0\\2&1&-1\\1&2&-1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&-\frac{1}{3}\\0&1&-\frac{1}{3}\\0&0&0\end{pmatrix}.\ \text{Sea}\ \begin{array}{l} z=k\in\mathbb{R}\\ x=-\frac{1}{3}z\\ y=-\frac{1}{3}z\end{array}$$

$$Ker(f)=\left\{\left(-\frac{1}{3}k,\ -\frac{1}{3}k,\ k\right)/\,k\in\mathbb{R}\right\}=\left\langle\left(-\frac{1}{3},-\frac{1}{3},1\right)\right\rangle.$$

Luego: $B_1=\left\{\left(-\frac{1}{3},-\frac{1}{3},1\right)\right\}$ es una base para $Ker(f)$ y $Nul(f)=1$.

ii) $\operatorname{Im}(f)=\langle f(1,0,0),\ f(0,1,0),\ f(0,0,1)\rangle=\langle(1,2,1),\ (-1,1,2),\ (0,-1,-1)\rangle$

Pero: $(0,-1,-1)=-\frac{1}{3}(1,2,1)-\frac{1}{3}(-1,1,2)$.

Luego, $\operatorname{Im}(f)=\langle(1,2,1),\ (-1,1,2)\rangle$.

Por lo tanto, $B_2=\{(1,2,1),\ (-1,1,2)\}$ es una base para $\operatorname{Im}(f)$ y $Rg(f)=2$.

c) i) $T(x,y,z)=(1,-1,2)$

$(x-y,\ y-x,\ 2x-2y)=(1,-1,2)$

$x-y=1$

Así $\text{Pr}\,eimágenes(1,-1,2)=\{(y+1,y)\,/\,y\in\mathbb{R}\}$

ii) $Ker(T)=\langle(1,1)\rangle\neq\{(0,0)\}$, por lo tanto T NO es inyectiva.

iii) Por el teorema de la dimensión, $Rg(T)=1\neq\dim\left(\mathbb{R}^2\right)$, por lo tanto T NO es epiyectiva.

Pregunta 2: (18 puntos; 9 puntos cada una)

a) Consideremos el conjunto $B=\left\{x^2+x+1, x+1, 1\right\}$, este conjunto forma una base para $\mathbb{R}_2[x]$.

En efecto:

Sean $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ tal que $\alpha\left(x^2+x+1\right)+\beta(x+1)+\gamma 1=0x^2+0x+0$, implica que $\alpha=\beta=\gamma=0$, luego dicho conjunto es linealmente independiente y también una base para $\mathbb{R}_2[x]$, porque $\#B=\dim\left(\mathbb{R}_2[x]\right)$.

Sea $ax^2+bx+c\in\mathbb{R}_2[x]$, entonces:

$$ax^2+bx+c=\alpha\left(x^2+x+x\right)+\beta(x+1)+\gamma 1$$

Luego: $\alpha=a,\quad \beta=b-a,\quad \gamma=c-b$.

Así: $$ax^2+bx+c=a\left(x^2+x+x\right)+(b-a)(x+1)+(c-b)1 \quad /f \text{ T.L.}$$

$$f\left(ax^2+bx+c\right)=af\left(x^2+x+x\right)+(b-a)f(x+1)+(c-b)f(1)$$

$$f\left(ax^2+bx+c\right)=a(0,0,0)+(b-a)(-1,0,1)+(c-b)(0,-1,1)$$

$$f\left(ax^2+bx+c\right)=(a-b,b-c,c-a)$$

b) Sea $p(x)=a+bx$.

$$\left[T(p(x))\right]_B=[T]_C^B\left[p(x)\right]_C$$

$$=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-a+b\\ a-b\\ b\end{pmatrix}$$

$$T(p(x))=(-a+b)1+(a-b)(x+1)+b\left(x^2+x\right)$$

$$=ax+bx^2$$

$$=x(a+bx)$$

$$=xp(x)$$

Pregunta 3: (12 puntos; 4 puntos cada una)

a) FALSO

Para $\lambda = \sqrt{2}$, T_λ es inyectiva porque $Ker(T_\lambda) = \{(0,0)\}$

En efecto: $Ker(T_\lambda) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / T_\lambda(x,y) = (0,0)\}$

$$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / (\lambda x + y, -2\lambda y + x) = (0,0)\}$$

$$= \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 / \left. \begin{array}{c} \lambda x + y = 0 \\ \underline{x - 2\lambda y = 0} \end{array} \right| \right\}$$

Entonces, $Ker(T_\lambda) = \{(0,0)\}$ ssi $\begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ 1 & -2\lambda \end{vmatrix} \neq 0$, es decir $-2\lambda^2 - 1 \neq 0$ o sea $2\lambda^2 + 1 \neq 0$; lo cual es verdadero para $\lambda = \sqrt{2}$.

b) VERDADERO

Pues $Ker(T) \leq V$.

c) FALSO

Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, entonces $A + B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y

$T(A+B) = rango(A+B) = 0$

$T(A) + T(B) = rango(A) + rango(B) = 1 + 1 = 2$

De donde se concluye que $T(A+B) \neq T(A) + T(B)$, por lo tanto T no es lineal.