PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE VALPARAISO

INSTITUTO DE MATEMÁTICA

PAUTA PRUEBA Nº1 DE MAT 213-01-02-03-04-05-06

CURSO: Álgebra Lineal **FECHA: 7/junio/08** **TIEMPO: 90 min.**

UNIDADES : Nº1. Matrices y Sistemas de Ecuaciones Lineales.
PROFESORES : M. Astudillo; E. Avilés; G. Figueroa; A. Morales; M. Parraguez.
ÚTILES : De escritorio.

PREGUNTAS

Pregunta 1: (32 puntos; 8 puntos cada una)

a)
$$X = A^3 B\ A^4 = \left(AA^2\right)(2A - I_4)^2\left(A^2\right)^2 = (AA)\left(4A^2 - 4A + I_2\right)\left(A^2\right) =$$
$$= A\left(4A - 4A + I_2\right)A = AI_2A = AA = A.$$

b)
$$\left|\left(A^3 B^t A^{-1}(-1)^{15} B^2\right)^t\right| = \left|A^3 B^t A^{-1}(-1)^{15} B^2\right| = \left|A^3 B^t A^{-1}(-1) B^2\right| =$$
$$= (-1)^3\left|A^3\right|\left|B^t\right|\left|A^{-1}\right|\left|B^2\right| = -1|A|^3|B||A|^{-1}|B|^2 = -1|A|^3|A|^{-1}|B|^2|B| =$$
$$= -1|A|^2|B|^3 = -1\left(\frac{1}{2}\right)^2(3)^3 = -\frac{27}{4}.$$

c)
$$\left(F_{12}\ F_{21}(-1)F_2\left(\frac{1}{2}\right)\ F_{12}(2)A = E\right) \Rightarrow \left(A = F_{12}(-2)F_2(2)F_{21}(1)F_{12}E\right)$$
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

d) $\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-4}{3} & 1 \end{array}\right)$. Sea $\begin{array}{l} z = t \in \mathbb{R} \\ x = -\frac{1}{3}t \\ y = 1 + \frac{4}{3}t \end{array}$, luego:

$$S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, (x, y, z) = (1, 0, 0) + t\left(\frac{4}{3}, \frac{-1}{3}, 1\right), t \in \mathbb{R} \right\}$$

Pregunta 2: (16 puntos)

$$\blacktriangle = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 2 & \beta & 1 \end{vmatrix} = \beta + 9$$

(a) El sistema tiene única solución para $k \in \mathbb{R} - \{-9\}$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ \alpha & 3 & 0 \\ 1 & \beta & 1 \end{vmatrix}}{\beta + 9} = \frac{6 - \alpha\beta}{\beta + 9}$$

(b) Si $\beta = -9$

$$(A/b) = \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 0 & \alpha \\ 2 & -9 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & \alpha + 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3\alpha + 2 \end{array}\right)$$

Si $\beta = -9$ y $\alpha \in \mathbb{R} - \left\{-\frac{2}{3}\right\}$ el sistema no tiene solución.

(c) Si $\beta = -9$ y $\alpha = -\frac{2}{3}$ el sistema tiene infinitas soluciones.

Pregunta 3: (12 puntos; 4 puntos cada una)

a) VERDADERA

Como $|A| = 1 \neq 0$, entonces A es invertible y $AX = b \quad / A^{-1}$, implica que $X = A^{-1}b$

b) VERDADERA

$|A| = -3 \neq 0$, entonces A es invertible

$|B| = -4 \neq 0$, entonces B es invertible

Luego, $ERF(A) = ERF(B) = I_3$. Por lo tanto $A \xrightarrow{F} B$

c) VERDADERA

$B\ A^t + (A + I_2)^t = A\ Adj(A) + C$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 2 \\ 3 & b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a+1 & 3 \\ 2 & b+1 \end{pmatrix} = |A|\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 12 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & 2 \\ 9 & 3b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a+1 & 2 \\ 3 & b+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ab-6 & 4 \\ 12 & ab-6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2a+1 & 4 \\ 12 & 4b+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ab-6 & 4 \\ 12 & ab-6 \end{pmatrix}$$

Así, $2a + 1 = ab - 6 \quad \wedge \quad 4b + 1 = ab - 6$, entonces: $2a + 1 = 4b + 1 \Leftrightarrow a = 2b$