PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE VALPARAISO

INSTITUTO DE MATEMÁTICA

PAUTA EXAMEN DE MAT 213-01-02-03-04-05-06

CURSO: Álgebra Lineal **FECHA: 09/Agosto/08** **TIEMPO: 120 min.**
PROFESORES : M. Astudillo; E. Avilés; G. Figueroa; A. Morales; M. Parraguez.
ÚTILES : De escritorio.

PREGUNTA 1: (20 puntos)

$$\blacktriangle = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & -5 \\ 0 & -5 & -12+a \end{vmatrix} = -5a + 35$$

(a) El sistema tiene única solución para $a \in \mathbb{R} - \{7\}$ y $b \in \mathbb{R}$

(b)

Si $a = 7$

$$(A/b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 7 & b \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & b+31 \end{array}\right)$$

Si $a = 7 \quad \wedge \quad b = -31$ el sistema tiene **Infinitas Soluciones** y es el conjunto:

$$S = \{(4-k, 5-k, k) / k \in \mathbb{R}\} \quad \text{pues: } (A/b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} z = k \in \mathbb{R} \\ x = 4-k \\ y = 5-k \end{array}$$

(c) Si $a = 7 \quad \wedge \quad b \in \mathbb{R} - \{31\}$ el sistema **No tiene solución.**

PREGUNTA 2: (20 puntos)

(a) $Ker(T) = \left\{ (x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \,/\, T(x,y,z,w) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$

$$= \left\{ (x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \,/ \begin{pmatrix} 2x-y+w & y-z \\ z-y & 2x-z+w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \left\{ (x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \,/ \begin{matrix} 2x-y+w=0 \\ y-z=0 \\ z-y=0 \\ 2x-z+w=0 \end{matrix} \right\}$$

$$= \left\{ (x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \,/ \begin{matrix} x = \frac{1}{2}z - \frac{1}{2}w \\ y = z \end{matrix} \right\}$$

$$= \left\{ \left(\frac{1}{2}z - \frac{1}{2}w, z, z, w \right) / \, z,w \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\langle \left(\frac{1}{2},1,1,0 \right), \left(-\frac{1}{2},0,0,1 \right) \right\rangle$$

Como $\left\{ \left(\frac{1}{2},1,1,0 \right), \left(-\frac{1}{2},0,0,1 \right) \right\}$ es un conjunto linealmente independiente y genera a $Ker(T)$, entonces es una base para $Ker(T)$, por lo tanto $Nul(T) = 2$.

(b) $\mathrm{Im}(T) = \langle T(1,0,0,0), T(0,1,0,0), T(0,0,1,0), T(0,0,0,1) \rangle$

$\mathrm{Im}(T) = \left\langle \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

Pero $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - 1\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

Por lo tanto $\left\{ \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right\}$ es una base para $\mathrm{Im}(T)$ y $Rg(T) = 2$.

(c) T no es inyectiva pues $Ker(T) \neq \{(0,0,0,0)\}$, ni tampoco epiyectiva pues $\mathrm{Im}(T) \neq M_2(\mathbb{R})$.

(d) $U=\left\langle \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle \leq M_2(\mathbb{R})$ es tal que $U \oplus \operatorname{Im}(T) = M_2(\mathbb{R})$ pues $Rg\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 4$.

PREGUNTA 3: (20 puntos)

(a) $P_A(x) = \begin{vmatrix} 1-x & 0 & 0 \\ 2 & 2-x & 0 \\ 2 & 0 & 2-x \end{vmatrix} = (1-x)(2-x)^2$. Luego los valores propios de A son 1 y 2.

(b) $Ker\left(A - I_3\right) = K\operatorname{er}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = Ker\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$

$= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x = -\frac{1}{2}z,\ y = z \right\} =$

$= \left\langle \left(-\frac{1}{2}, 1, 1 \right) \right\rangle$

$Ker\left(A - 2I_3\right) = K\operatorname{er}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = Ker\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$

$= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x = 0 \right\} =$

$= \left\langle (0,1,0), (0,0,1) \right\rangle$

La multiplicidad del valor propio 1 es $m_1 = 1$ y
La multiplicidad del valor propio 2 es $m_2 = 2$.
Además, $\dim\left(K\operatorname{er}\left(A - I_3\right)\right) = 1 = m_1$ y $\dim\left(K\operatorname{er}\left(A - 2I_3\right)\right) = 2 = m_2$.
Lo cual prueba que la matriz A es diagonalizable.

Sea $P = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Se cumple que $P^{-1}AP = D$.

(c) Como $A = PDP^{-1}$, entonces $A^2 = PD^2P^{-1}$, de donde $PA^2P^{-1} = D^2$, lo cual prueba que A^2 es diagonalizable y la matriz diagonal semejante a A^2 es $D^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.