PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE VALPARAÍSO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA

PAUTA PRUEBA 3 DE MAT 213-01-02-03-04-05

CURSO: Álgebra Lineal FECHA: 17/11/07 TIEMPO: 90 min.
UNIDADES : Nº3. Trasformaciones Lineales
Nº4. Diagonalización.
PROFESORES : A. Cabrera; M. Parraguez; R. Salazar; H. Soto; C. Torrealba.
ÚTILES : De escritorio.

PREGUNTA 1: (18 puntos; 6 puntos cada una)

a) Sea $C = \left\{1, x, x^2\right\}$ base Canónica de $\mathbb{R}_2\left[x\right]$, entonces:

$$\left[f\left(1+x-2x^2\right)\right]_B = \left[f\right]_C^B\left[\left(1+x-2x^2\right)\right]_C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

b) $$\left[f\right]_D^B = \left[f\right]_C^B\left[id\right]_D^C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

c) Como $\left|\left[f\right]_C^B\right| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, se tiene que f es isomorfismo.

.

PREGUNTA 2: (18 puntos; (a) 7 puntos, (b) 11 puntos)

(a) $$[f]_C^B\left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right]_C = [f]_C^B\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+b+c-3d \\ -b+c+2d \\ a+c-d \end{bmatrix}$$

Luego:

$$f\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = (a+2c-d, a-b+3c+d, 3a+6c-3d)$$

(b) $$Ker(f) = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \,/\, \begin{matrix} a+2c-d=0 \\ a-b+3c+d=0 \\ 3a+6c-3d=0 \end{matrix}\right\}$$

$$= \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \,/\, \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 6 & -3 & 0 \end{array}\right]\right\}$$

$$= \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \,/\, \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]\right\}$$

$$= \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \,/\, a=-2c+d \quad \wedge \quad b=c+2d\right\}$$

$$= \left\{\begin{bmatrix} -2c+d & c+2d \\ c & d \end{bmatrix} / \, c,d \in \mathbb{R}\right\}$$

$$= \left\langle \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\rangle \quad \text{y} \quad \left\{\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\} \text{ es l.i.}$$

$$B = \left\{\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\} \text{ es base para Ker(f)}$$

$$\mathrm{Im}(f) = \langle f(e_1), f(e_2), f(e_3), f(e_4), \rangle$$

$$= \langle (1,1,3), (0,-1,0), (2,3,6), (-1,1,-3) \rangle$$

$$= \langle (1,1,3), (0,-1,0) \rangle \quad \text{y} \quad \{(1,1,3), (0,-1,0)\} \text{ es l.i.}$$

$$B_1 = \{(1,1,3), (0,-1,0)\} \text{ es base para Im(f)}$$

PREGUNTA 3: (24 puntos; (a) 6 puntos, (b) 12 puntos, (c) y (d) 3 puntos c/u.)

(a) El polinomio característico es

$$P_T(x)=\begin{vmatrix} 5-x & -1 & 3 \\ -6 & 4-x & -6 \\ -6 & 2 & -4-x \end{vmatrix} = -x^3+5x^2-8x+4$$

Como $x=1$ es un valor propio, entonces $-(x-1)(x-2)^2$ es la factorización del polinomio, luego $x=2$ es el otro valor propio de multiplicidad 2 y $x=1$ un valor propio de multiplicidad 1.

(b) $$V_1 = Ker\left([T]_C - I_3\right) = Ker\left(\begin{bmatrix} 4 & -1 & 3 \\ -6 & 3 & -6 \\ -6 & 2 & -5 \end{bmatrix}\right) = Ker\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right)$$

$V_1 = \left\langle \left(\frac{1}{2},1,1\right)\right\rangle = \left\langle (1,2,2)\right\rangle$. Luego $\dim(V_1)=1$.

$$V_2 = Ker\left([T]_C - 2I_3\right) = Ker\left(\begin{bmatrix} 3 & -1 & 3 \\ -6 & 2 & -6 \\ -6 & 2 & -6 \end{bmatrix}\right) = Ker\left(\begin{bmatrix} 1 & \frac{-1}{3} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right)$$

$= \left\langle \left(\frac{1}{3},1,0\right),(-1,0,1)\right\rangle = \left\langle (1,3,0),(-1,0,1)\right\rangle$. Luego $\dim(V_2)=2$

(c) $[T]_C$ es diagonalizable pues: $\begin{cases} \dim(V_1) = \text{multiplicidad del } 1 = 1 \\ \dim(V_2) = \text{multiplicidad del } 2 = 2 \end{cases}$

(d) Una base $\mathbb{R}^3$ que diagonaliza a $[T]_C$ es: $B=\{(1,2,2),(1,3,0),(-1,0,1)\}$