PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE VALPARAISO

INSTITUTO DE MATEMÁTICA

PAUTA PRUEBA Nº2 DE MAT 213-01-02-03-04-05-06

CURSO: Álgebra Lineal **FECHA: 5/julio/08** **TIEMPO: 90 min.**

UNIDADES : Nº2. Espacios vectoriales Reales.
PROFESORES : M. Astudillo; E. Avilés; G. Figueroa; A. Morales; M. Parraguez.
ÚTILES : De escritorio.

PREGUNTAS

Pregunta 1: (32 puntos; 8 puntos cada una)

a) $(-1,1,2) \in V \Leftrightarrow \left[(\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}) : (-1,1,2) = \alpha(1,2,1) + \beta(-1,0,1)\right]$

$$(-1,1,2) = (\alpha - \beta, 2\alpha, \alpha + \beta)$$

De donde: $\left.\begin{array}{r} \alpha - \beta = -1 \\ 2\alpha = 1 \\ \alpha + \beta = 2 \end{array}\right| \begin{array}{l} \Rightarrow \beta = \alpha + 1 = \dfrac{3}{2} \\ \Rightarrow \alpha = \dfrac{1}{2} \end{array}$

Luego, $(-1,1,2) \in V$

b) Sea $A = \{x\}$, entonces $A \cup B = \left\{ x^2 + 2, x^2 + 1, x \right\}$ es un conjunto linealmente independiente.

En efecto, sean $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tal que: $\alpha\left(x^2 + 2\right) + \beta\left(x^2 + 1\right) + \gamma x = 0x^2 + 0x + 0$

Entonces, $\left.\begin{array}{r} \alpha + \beta = 0 \\ 2\alpha + \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{array}\right| \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$ y como $\dim\left(\mathbb{R}_2[x]\right) = 3 = \#(A \cup B)$, entonces $A \cup B = \left\{ x^2 + 2, x^2 + 1, x \right\}$ es una base de $\mathbb{R}_2[x]$.

c) $W=\left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$ y como $B=\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ es un conjunto linealmente independiente, en efecto:

Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tal que: $\alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\alpha = \beta = 0$$

Como *B* genera y es linealmente independiente, es una base para *W*. Por lo tanto $\dim(W) = 2$

d) $(1,1,1) = \frac{1}{3}(1,1,-3) + \frac{2}{3}(1,-1,1) + \frac{4}{3}(0,1,1)$. Por lo tanto: $\left[(1,1,1)\right]_{B_2} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ 4/3 \end{pmatrix}$

$$(1,0,-1) = \frac{1}{2}(1,1,-3) + \frac{1}{2}(1,-1,1) + 0(0,1,1)$$

$$(1,1,0) = \frac{1}{2}(1,1,-3) + \frac{1}{2}(1,-1,1) + 1(0,1,1),$$

Entonces: $[id]_{B_1}^{B_2} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/2 & 1/2 \\ 2/3 & 1/2 & 1/2 \\ 4/3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Pregunta 2: (16 puntos; 8 puntos cada una)

(a) Sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & c \end{pmatrix} \in V$ entonces: $A = \begin{pmatrix} a & a \\ c & d \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Entonces: $V = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle + \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$.

Sea $W = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$.

Si $\left(A \in U \cap W\right) \Rightarrow \left(A = a\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \wedge \quad A = c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$, entonces:
$\begin{pmatrix} a & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow a = c = d = 0$. Por lo tanto: $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
Luego: $V = U \oplus W$.

(b) $[v]_{B_1} = [id]_{B_2}^{B_1} [v]_{B_2} =$

$$= \left([id]_{B_1}^{B_2} \right)^{-1} [v]_{B_2} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 2/3 & -1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}.$$

Pregunta 3: (12 puntos; 4 puntos cada una)

a) FALSA

$p(x) = 0 + 0x + 0x^2 \notin W$, pues $p'(1) - p(-1) = 0 - 0 = 0 \neq 1$

b) FALSA

$\langle (k,1,1),(1,3,-2),(1,1,1) \rangle = \mathbb{R}^3$, si el conjunto $\{(k,1,1),(1,3,-2),(1,1,1)\}$ es linealmente independiente.
En efecto, sean $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tal que: el sistema $\alpha(k,1,1) + \beta(1,3,-2) + \gamma(1,1,1) = (0,0,0)$ tenga solución única, es decir:

$$\begin{vmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 5k - 5 \neq 0 \Leftrightarrow k \neq 1.$$

Así, el conjunto $\{(k,1,1),(1,3,-2),(1,1,1)\}$ genera a $\mathbb{R}^3$, si y sólo si $k \in \mathbb{R} - \{1\}$.

c) VERDADERA

Sea $\left((x,y,z)\in U\cap W\right)\Leftrightarrow\left((x,y,z)\in U \quad\wedge\quad (x,y,z)\in W\right)$

$\Leftrightarrow\left(x+2y+z=0 \quad\wedge\quad x+y=0\right)$.

Luego: $\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$

De donde: $U\cap W=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / x=y=-z\right\}$

$U\cap W=\left\{(x,x,-x)/x\in\mathbb{R}\right\}=\left\langle(1,1,-1)\right\rangle$

Por lo tanto: $\dim(U\cap W)=1$.