Capítulo II: Matrices y Ecuaciones Lineales

Profesores: Gladys Figueroa R.
Raúl Fierro P.

En lo que sigue, para todo $n \in \mathbb{N}$, anotaremos $J_n = \{1, \ldots, n\}$.

1. Álgebra de Matrices

Definición y notación 1 Una matriz de orden $m \times n$ sobre $\mathbb{K}$ es una función $A : J_m \times J_n \to \mathbb{K}$. Si $A(i,j) = a_{ij}$, anotaremos esta matriz como $A = (a_{ij}; 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n)$, o bien, mediante el siguiente arreglo rectangular de m filas (horizontales) y n columnas (verticales):

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Ejemplo 2 Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{i} & 0 \\ 3 & 1-\mathrm{i} & \mathrm{i} \end{pmatrix}$. ¿Sobre qué campo puede ser considerada esta matriz A?

Respuesta. Sobre el campo de lo números complejos, es decir, sobre $\mathbb{C}$.

Notación 3 Denotaremos por $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ el conjunto de todas las matrices de orden $m \times n$ sobre $\mathbb{K}$. Ahora bien, si el número de filas es igual al número de columnas y es igual a n (matriz cuadrada), anotaremos $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$.

Definiciones 4 Sean $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ tales que $A = (a_{ij}; 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n)$ y $B = (b_{ij}; 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n)$. Definimos la suma y multiplicación por escalar en $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ como sigue:

(4.1) $A + B = (a_{ij} + b_{ij}; 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n)$.

(4.2) Si $\alpha \in \mathbb{K}$, entonces $\alpha A = (\alpha a_{ij}; 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n)$.

Ejemplo 5 Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -3 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -8 \\ -4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Entonces, $A + B = \begin{pmatrix} 2 & 7 & -9 \\ -7 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ y $3A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & -3 \\ -9 & 0 & -6 \end{pmatrix}$.

Observación 6 No es difícil verificar que con las operaciones de suma y multiplicación por escalar definidas en 4, $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$, sin embargo, este hecho no tiene mayor importancia en este capítulo.

Definición 7 Sean $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ y $B \in \mathcal{M}_{n\times l}(\mathbb{K})$. La multiplicación de A por B es la matriz $C = (c_{ij}; 1 \le i \le m, 1 \le j \le l)$ en $\mathcal{M}_{m\times l}(\mathbb{K})$, que anotaremos $C = AB$ y, que se define como

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \ , \tag{7.1}$$

donde $A = (a_{ij}; 1 \le i \le m, 1 \le j \le n)$ y $B = (b_{ij}; 1 \le i \le n, 1 \le j \le l)$.

Ejemplo 8 Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Luego $AB \in \mathcal{M}_{3\times 4}(\mathbb{R})$ y $AB = \begin{pmatrix} 9 & 5 & 3 & -2 \\ 11 & 5 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Proposición 9 Sean $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{n\times l}(\mathbb{K})$ y $C \in \mathcal{M}_{l\times r}(\mathbb{K})$. Entonces,

$$(AB)C = A(BC). \tag{9.1}$$

Demostración. Notemos en primer lugar que las matrices $(AB)C$ y $A(BC)$ son ambas de orden $m \times r$. Sea $(i, j) \in J_m \times J_r$. La componente (i, j) de la matriz $(AB)C$ esta dada por

$$\begin{aligned}
[(AB)C](i,j) &= \textstyle\sum_{k=1}^{l} (AB)(i,k)C(k,j) \\
&= \textstyle\sum_{k=1}^{l} \sum_{s=1}^{n} A(i,s)B(s,k)C(k,j) \\
&= \textstyle\sum_{s=1}^{n} \sum_{k=1}^{l} A(i,s)B(s,k)C(k,j) \\
&= \textstyle\sum_{s=1}^{n} A(i,s) \sum_{k=1}^{l} B(s,k)C(k,j) \\
&= \textstyle\sum_{s=1}^{n} A(i,s)(BC)(s,j) \\
&= [A(BC)](i,j).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, (9.1) se satisface. ∎

Proposición 10 Sean $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ y $B, C \in \mathcal{M}_{n\times l}(\mathbb{K})$. Entonces,

$$(10.1) \qquad A(B+C) = AB + AC.$$

Demostración. Sea $(i,j) \in J_m \times J_l$. Luego,

$$\begin{array}{rcl} [A(B+C)](i,j) & = & \sum_{k=1}^{n} A(i,k)(B+C)(k,j) \\ & = & \sum_{k=1}^{n} A(i,k)(B(k,j)+C(k,j)) \\ & = & \sum_{k=1}^{n}(A(i,k)B(k,j)+A(i,k)C(k,j)) \\ & = & \sum_{k=1}^{n} A(i,k)B(k,j) + \sum_{k=1}^{n} A(i,k)C(k,j) \\ & = & (AB)(i,j) + (AC)(i,j) \\ & = & (AB+AC)(i,j), \end{array}$$

lo cual demuestra (10.1). ∎

Proposición 11 Sean $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ y $C \in \mathcal{M}_{n\times l}(\mathbb{K})$. Entonces,

$$(11.1) \qquad (A+B)C = AC + BC.$$

Demostración. Ejercicio.

Observaciones 12 La Proposición 9 nos dice que la multiplicación de matrices es asociativa, en tanto que las Proposiciones 10 y 11 expresan que la multiplicación de matrices es distributiva respecto de la suma de ellas. Sin embargo, es fácil encontrar contraejemplos que muestran que esta operación no es conmutativa. Por ejemplo, definiendo matrices A y B como $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, se tiene que $AB = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ y $BA = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. En consecuencia, $AB \neq BA$.

Definición 13 La matriz identidad en $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ es la matriz I_n definida por

$$(13.1) \qquad \mathrm{I}_n(i,j) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad i = j \\ 0 & \text{si} \quad i \neq j. \end{cases}$$

Es decir, I_n es la matriz (cuadrada) de orden $n \times n$ con “unos” en la diagonal y “ceros” en las otras ubicaciones del arreglo.

Proposición 14 Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Entonces, (14.1) $\mathrm{I}_m A = A$.

(14.2) $A\mathrm{I}_n = A$.

Demostración. Demostraremos sólo (14.1), dejando (14.2) como ejercicio para el estudiante. Sea $(i,j) \in J_n \times J_n$. Luego,

$$(\mathrm{I}_m A)(i,j) = \sum_{k=1}^{m} \mathrm{I}_m(i,k)A(k,j) = A(i,j).$$

Nótese que la sumatoria en el penúltima igualdad consta esencialmente del único término $1 \cdot A(i,j)$, debido a que $\mathrm{I}_m(i,k) = 0$ si $k \neq i$. Por lo tanto, $\mathrm{I}_m A = A$. ■

Definiciones 15 Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Se dice que A es una matriz invertible (o no singular), si y sólo si, existe una matriz $A' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tal que $AA' = A'A = \mathrm{I}_n$. Esta matriz A' (cuando existe) se conoce como la inversa de A y se denota por A^{-1}.

Ejemplos 16

(16.1) Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Verificar que A es invertible y determinar A^{-1}.

Solución. Por el momento, supongamos que A es invertible y que $A^{-1} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$.

Como $A^{-1}A = \mathrm{I}_2$, el sistema de ecuaciones siguiente se satisface:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & y & & & & & = & 1 \\ 2x & + & y & & & & & = & 0 \\ & & & & z & + & w & = & 0 \\ & & & & 2z & + & w & = & 1 \end{array}\right| .$$

La única solución de este sistema es $x = -1$, $y = 2$, $z = 1$ y $w = -1$. Luego, si existe A^{-1}, entonces

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ahora bien, se verifica fácilmente que esta matriz satisface $AA^{-1} = \mathrm{I}_2$. Por lo tanto, A es invertible y su inversa es la matriz ya determinada.

(16.2) Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Verificar que A no es invertible.

Solución. Supongamos que A es invertible. Sea $A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Luego,

$$\begin{pmatrix} a+c & b+d \\ a+c & b+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pero esto implica que $a + c = 1$ y $a + c = 0$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, no existe A^{-1} y en consecuencia A no es invertible.

Definiciones 17 La matriz nula en $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, es la matriz $\mathrm{O} \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ tal que para todo $(i, j) \in J_m \times J_n$, $\mathrm{O}(i, j) = 0$.

Observación 18 Sean $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ y $B \in \mathcal{M}_{n\times l}(\mathbb{K})$. En general, no se cumple que si $AB = \mathrm{O}$, entonces $A = \mathrm{O}$ ó bien $B = \mathrm{O}$. En efecto, sean A y B las matrices en $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{K})$ definidas por $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$.

Luego, se verifica fácilmente que

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y sin embargo, $A \neq \mathrm{O}$ y $B \neq \mathrm{O}$. Esta situación no ocurre cuando alguna de las dos matrices posee inverso para la multiplicación. En efecto, sean $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ y supongamos que existe A^{-1}. Luego, $A^{-1}(AB) = (A^{-1}A)B = \mathrm{I}_n B = B$. Por lo tanto, si $AB = \mathrm{O}$ entonces necesariamente $B = \mathrm{O}$.

Definición 19 Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tal que $A = (a_{ij}; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n)$. La traza de A, que anotamos $\mathrm{tr}(A)$, se define como

(19.1) $\mathrm{tr}(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{jj}$.

Ejemplo 20 Sean $a, b, c \in \mathbb{C}$ y $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$.

Determinar condiciones sobre a, b y c para que $\mathrm{tr}(A^2) = \mathrm{tr}(A)^2$.

Solución. Como

$$A^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & b^2 & 0 \\ 0 & 0 & c^2 \end{pmatrix},$$

entonces $\mathrm{tr}(A^2) = a^2+b^2+c^2$. Por otra parte, $\mathrm{tr}(A) = a+b+c$ y entonces, la condición requerida es $a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2$. Por lo tanto, $\mathrm{tr}(A^2) = \mathrm{tr}(A)^2$, si y sólo si, $ab + ac + bc = 0$.

Ejercicios propuestos

1. Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$, determine la relación entre los parámetros a, b y c para que se cumpla la igualdad $AB^2 + 2C = D$, donde $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & 2 \\ c & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & c & 5 \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} a & b & 10 \end{pmatrix}$.

Respuesta: $a = b + 3$ y $b = 2c$.

2. Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 1 & -5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$. Encuentre $D \in \mathcal{M}_{3\times 2}(\mathbb{R})$ tal que $A + B - D = 0$.

Respuesta: $D = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 4 & -1 \\ 9 & 9 \end{pmatrix}$.

3. Sean $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$.

Encuentre $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ tal que $2A + 3X = \frac{1}{3}CB$.

Respuesta: $X = \begin{pmatrix} -4/3 & 2 & 10/3 \\ 2/3 & -8/3 & -10/3 \\ -2/3 & 2 & 8/3 \end{pmatrix}$.

4. Demuestre que no existe $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tal que $AB = BA = \mathrm{I}_2$, donde $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$.

5. Sea $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Demuestre que si $AB = BA$ y $AC = CA$, entonces $BC = CB$.

6. Encuentre $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tal que $A^2 = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Respuesta: $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$.

7. Obtenga todas las matrices en $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ que conmutan con $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Respuesta: $\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in \mathcal{M}^2(\mathbb{C}) : 2a + b = 2c \right\}$.

8. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Demuestre las afirmaciones siguientes:

(8.1) Si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ entonces $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.

(8.2) Si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ y B es invertible entonces $\mathrm{tr}(B^{-1}AB) = \mathrm{tr}(A)$.

9. Sean $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Demuestre que las tres condiciones siguientes son equivalentes:

(9.1) $AB = BA$.

(9.2) $A^2 - B^2 = (A + B)(A - B)$.

(9.3) $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$.

10. Sean $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tales que $AB = \lambda B$, donde $\lambda \in \mathbb{K}$. Demuestre que $A^p B = \lambda^p B$, para todo $p \in \mathbb{N}$.

11. Sea $b \in \mathbb{R}$ y $A = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Conjeture una fórmula para A^n, ($n \in \mathbb{N}$) y demuéstrela por inducción.

Respuesta: $A^n = \begin{pmatrix} 1 & nb \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

12. Sea $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(12.1) Calcule A^k para todo $k \in \mathbb{N}$.

(12.2) Calcule $(\mathrm{I}_3 + A)^{21}$.

Respuestas:

(12.1) $A^0 = \mathrm{I}_3$, $A^1 = A$, $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $A^k = 0$ si $k \geq 3$.

(12.2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 21 & 1 & 0 \\ 252 & 21 & 1 \end{pmatrix}$.

13. Sean $a, b, c, d \in \mathbb{K}$. Demuestre que si $ad \neq bc$, entonces

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

14. Sean $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ matrices invertibles. Demuestre que AB es invertible y que $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

2. Matrices Especiales

Definiciones 1 Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tal que $A = (a_{ij}; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n)$. Se dice que

(1.1) A es diagonal, si y sólo si, para todo $i \neq j$, $a_{ij} = 0$.

(1.2) A es nilpotente, si y sólo si, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $A^k = \mathrm{O}$.

(1.3) A es idempotente, si y sólo si, $A^2 = A$.

(1.4) A es triangular superior, si y sólo si, $a_{ij} = 0$ cuando $j < i$.

(1.5) A es triangular inferior, si y sólo si, $a_{ij} = 0$ cuando $j > i$.

Ejemplo 2 Sean $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ matrices triangulares superiores. Demostrar que AB es una matriz triangular superior.

Demostración. Sean $A = (a_{ij}; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n)$ y $B = (b_{ij}; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n)$. Luego, para todo $(i,j) \in J_n \times J_n$ se tiene que $(AB)(i,j) = \sum_{k=1}^{n} A(i,k)B(k,j)$. Sea $(i,j) \in J_n \times J_n$ tal que $i > j$ y demostremos que $(AB)(i,j) = 0$. Como B es matriz triangular superior se tiene que $B(k,j) = 0$ si $k > j$, y entonces $(AB)(i,j) = \sum_{k=1}^{j} A(i,k)B(k,j)$. Tenemos que $A(i,k) = 0$ si $k < i$, y teniendo en cuenta que $j < i$, se tiene que los términos de esta última sumatoria son todos nulo. Por lo tanto, $(AB)(i,j) = 0$.

Ejemplo 3 Sea $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. ¿Es A una matriz nilpotente?

Solución. Tenemos que

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Luego, A es una matriz nilpotente.

Definición 4 Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ tal que $A = (a_{ij}; 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n)$. La matriz traspuesta de A es la matriz $A^{\mathrm{t}} \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{K})$ definida por $A^{\mathrm{t}} = (a_{ji}; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m)$.

Ejemplo 5 Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \\ \mathrm{i} & -\mathrm{i} \end{pmatrix}$. Luego $A^{\mathrm{t}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & \mathrm{i} \\ 3 & 4 & -\mathrm{i} \end{pmatrix}$.

Observaciones 6

(6.1) Si $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, entonces $(A+B)^{\mathrm{t}} = A^{\mathrm{t}} + B^{\mathrm{t}}$.

(6.2) Si $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, entonces $(A^{\mathrm{t}})^{\mathrm{t}} = A$.

(6.3) Si $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ y $B \in \mathcal{M}_{n\times l}(\mathbb{K})$, entonces $(AB)^{\mathrm{t}} = B^{\mathrm{t}}A^{\mathrm{t}}$.

(6.4) Si $\alpha \in \mathbb{K}$ y $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, entonces $(\alpha A)^{\mathrm{t}} = \alpha A^{\mathrm{t}}$.

Definiciones 7 Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Se dice que

(7.1) A es simétrica, si y sólo si, $A = A^{\mathrm{t}}$.

(7.2) A es antisimétrica, si y sólo si, $A = -A^{\mathrm{t}}$.

(7.3) A es ortogonal, si y sólo si, $A^{\mathrm{t}}A = \mathrm{I}_n$.

Ejemplos 8

(8.1) La matriz $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 5 & -4 \\ 3 & -4 & 1 \end{pmatrix}$ es simétrica.

(8.2) La matriz $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & -5 \\ -1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$ es antisimétrica.

(8.3) La matriz $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ no es simétrica ni antisimétrica.

(8.4) La matriz $\begin{pmatrix} \sqrt{3}/3 & \sqrt{6}/6 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{3}/3 & -\sqrt{6}/3 & 0 \\ \sqrt{3}/3 & \sqrt{6}/6 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$ es ortogonal.

Observación 9 Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ es una matriz ortogonal, entonces el conjunto de columnas de A vistas como vectores de $\mathbb{R}^n$, es un conjunto de vectores ortogonales de norma 1.

Definiciones 10 Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$, $A = (a_{ij}; 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n)$.

(10.1) La matriz conjugada de A es la matriz $\overline{A} \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$ definida por $\overline{A} = (\overline{a_{ij}}; 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n)$.

(10.2) La matriz trasconjugada (o conjugada Hermitiana) de A es la matriz $A^* \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{C})$ definida por $A^* = (\overline{A})^{\mathrm{t}}$.

Ejemplo 11 Sea $A = \begin{pmatrix} 3-\mathrm{i} & 0 & -2 \\ \mathrm{i} & 1+\mathrm{i} & 2\mathrm{i} \end{pmatrix}$. Entonces, $\overline{A} = \begin{pmatrix} 3+\mathrm{i} & 0 & -2 \\ -\mathrm{i} & 1-\mathrm{i} & -2\mathrm{i} \end{pmatrix}$

y $A^* = \begin{pmatrix} 3+\mathrm{i} & -\mathrm{i} \\ 0 & 1-\mathrm{i} \\ -2 & -2\mathrm{i} \end{pmatrix}$

Observaciones 12

(12.1) Si $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$, entonces $(A+B)^* = A^* + B^*$.

(12.2) Si $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$, entonces $(A^*)^* = A$.

(12.3) Si $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$ y $B \in \mathcal{M}_{n\times l}(\mathbb{C})$, entonces $(AB)^* = B^*A^*$.

(12.4) Si $\alpha \in \mathbb{C}$ y $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, entonces $(\alpha A)^* = \overline{\alpha} A^*$.

Definiciones 13 Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Se dice que

(13.1) A es hermitiana, si y sólo si, $A = A^*$.

(13.1) A es antihermitiana, si y sólo si, $A = -A^*$.

(13.3) A es unitaria, si y sólo si, $A^*A = \mathrm{I}_n$.

Ejemplos 14

(14.1) La matriz $\begin{pmatrix} -2 & 5+3\mathrm{i} & 2+4\mathrm{i} \\ 5-3\mathrm{i} & 5 & 1-\mathrm{i} \\ 2-4\mathrm{i} & 1+\mathrm{i} & \pi \end{pmatrix}$ es hermitiana.

(14.2) La matriz $\begin{pmatrix} \mathrm{i} & 1+\mathrm{i} & 2 \\ -1+\mathrm{i} & -2\mathrm{i} & 5+3\mathrm{i} \\ 2- & -5+3\mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}$ es antihermitiana.

(14.3) La matriz $\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1+2\mathrm{i} & -4-2\mathrm{i} \\ 2-4\mathrm{i} & -2-\mathrm{i} \end{pmatrix}$ es unitaria.

Ejercicios propuestos

1. Verifique que la matriz $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ es nilpotente.

2. Sea $D = \mathrm{Diag}(a_1, \ldots, a_n) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

(2.1) ¿Qué condiciones deben satisfacer $a_1, \ldots, a_n$ para que D sea invertible?

(2.2) Si D es invertible, calcule D^{-1}.

Respuestas: (2.1) $a_1 \cdots a_n \neq 0$. (2.2) $D^{-1} = \mathrm{Diag}(a_1^{-1}, \ldots, a_n^{-1})$.

3. Encuentre $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tal que $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$ y A no es una matriz triangular inferior. Además, la diferencia de los elementos que ocupan la diagonal de A es distinta de cero e igual a la diferencia de los elementos que ocupan la diagonal de B.

Respuesta: $A = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. (Existen otras soluciones).

4. Demuestre que la única matriz idempotente e invertible es la matriz identidad.

5. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Demuestre que si A es idempotente, entonces $\mathrm{I}_n - A$ también lo es y que $A(\mathrm{I}_n - A) = (\mathrm{I}_n - A)A = \mathrm{O}$.

6. Encuentre $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ diagonal tal que $A^{\mathrm{t}} X (A + B^{\mathrm{t}}) = C$, donde

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{pmatrix} -14 & -4 & -10 \\ 4 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Respuesta: $X = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

7. Demuestre que si $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ y $X \in \mathcal{M}_{2\times 1}(\mathbb{R})$ entonces $X^{\mathrm{t}} A X = \frac{1}{2} X^{\mathrm{t}} (A^{\mathrm{t}} + A) X$.

8. Sean $A = (a_{ij}; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n)$ y $B = (b_{ij}; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n)$ definidas por $a_{ij} = (-1)^{i-j}$ y $b_{ij} = i - j$. Demuestre que A es simétrica y B es antisimétrica.

9. Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$. Demuestre que $A^{\mathrm{t}} A$ es simétrica y sin elementos negativos en la diagonal.

10. Sean $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ y $P \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Demuestre que si A es simétrica, entonces PAP^{t} también lo es.

11. Demuestre que si A es una matriz invertible y simétrica, entonces A^{-1} es simétrica.

12. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Demuestre que A admite la descomposición $A = A_s + A_a$, donde A_s y A_a son matrices simétrica y antisimétrica, respectivamente.

13. Demuestre que la diagonal de una matriz hermitiana está formada por números reales y que la diagonal de una matriz antihermitiana lo está por números imaginarios puros.

14. Sean $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$ y $B \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{C})$. Demuestre que $\overline{A}\,\overline{B} = \overline{AB}$.

15. Demuestre que si A es invertible y hermitiana entonces A^{-1} es hermitiana.

16. Sean $B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tales que $BC + CB = 0$ y sea $A = B + \mathrm{i}C$. Demuestre que si A es hermitiana entonces A^*A es una matriz con coeficientes reales.

17. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ hermitiana. Demuestre que existen $R, S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tales que $A = R + \mathrm{i}S$, donde R es simétrica y S es antisimétrica.

18. Sea $W = \left\{ \begin{pmatrix} a & a+\mathrm{i}b \\ c & c+\mathrm{i}b \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) : a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$ un subespacio vectorial de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ sobre $\mathbb{R}$. Encuentre una base de W y determine $\dim_{\mathbb{R}}(W)$.

Respuestas: $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{i} \\ 0 & \mathrm{i} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ y $\dim_{\mathbb{R}}(W) = 3$.

19. Sean $U = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) : A \text{ es diagonal } \}$ y $W = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) : A = A^*\}$ subespacios de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ sobre $\mathbb{R}$.

(19.1) Encuentre $U \cap V$.

(19.2) Encuentre bases de U, W y $U \cap V$.

(19.3) Determine $\dim(U)$, $\dim(W)$ y $\dim(U \cap V)$.

Respuestas:

(19.1) $U \cap V = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) : a, b \in \mathbb{R} \right\}$.

(19.2) Base de U: $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathrm{i} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{i} \end{pmatrix} \right\}$.

Base de W: $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{i} \\ -\mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}\right\}$.

Base de $U \cap V$: $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$.

(19.3) $\dim(U) = 4$, $\dim(W) = 4$ y $\dim(U \cap W) = 2$.

20. Verifique que $\mathcal{S} = \left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$ es un conjunto linealmente independiente y encuentre una base $\mathcal{B}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tal que $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{B}$ y los vectores agregados a $\mathcal{S}$ sean elementos de $W = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) : a + b + c = 0\right\}$.

Respuesta: $\left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$.

21. Sean $U = \left\{\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) : x + y + z = 0, y - z - w = 0\right\}$ y W el subespacio de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ generado por $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right\}$.

(21.1) Encuentre una base de U y determine la dimensión de U.

(21.2) Extender la base de U a una base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ de modo que los vectores agregados no sean elementos de W.

Respuestas:

(21.1) Base de U: $\left\{\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$.

(21.2) Base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$: $\left\{\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$.

22. Determine si las afirmaciones siguientes son verdaderas o falsas. Justifique.

(22.1) $\{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : AB = BA\}$, $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, es un subespacio vectorial de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(22.2) $\{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : A^2 = A\}$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(22.3) $\{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) : A = A^*\}$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sobre $\mathbb{R}$.

(22.4) Si $U = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & d & f \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) : a = -2c, f = 2c + d \right\}$ entonces

$$\left\{ \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right\} \text{ genera } U.$$

(22.5) Si $V = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) : A = -A^{\mathrm{t}}\}$ entonces $\dim_{\mathbb{R}}(V) = 2$ y $\dim_{\mathbb{C}}(V) = 1$.

Respuestas:

(22.1) Verdadera. (22.2) Falsa. (22.3) Verdadera.

(22.4) Falsa. (22.5) Verdadera.

3. Operaciones elementales

Definiciones 1 Sea $n \in \mathbb{N}^*$. Llamaremos matrices elementales de orden n a las matrices $E_i(\alpha)$, E_{ij}, $F_{ij}(\alpha)$ y $C_{ij}(\alpha)$ en $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, ($1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n$, $\alpha \in \mathbb{K}$), definidas de la manera siguiente:

(1.1) $E_i(\alpha)$ es la matriz resultante al multiplicar por α, cada componente de la fila o columna i de la matriz identidad.

$$\begin{array}{ccc} E_i(\alpha) = & \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \alpha & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} & \leftarrow \text{ fila } i \\ & \uparrow & \\ & \text{columna } i & \end{array}$$

(1.2) E_{ij} es la matriz resultante al intercambiar en la matriz identidad, la fila o columna i por la fila o columna j, respectivamente.

$$\begin{array}{ccc}
 & \text{columna } i & \\
 & \downarrow & \\
E_{ij} \; = & \begin{pmatrix}
1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & \cdots & \boxed{0} & \cdots & \boxed{1} & \cdots & 0 \\
\vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & \cdots & \boxed{1} & \cdots & \boxed{0} & \cdots & 0 \\
\vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1
\end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow \; \text{fila } i \\ \\ \leftarrow \; \text{fila } j \\ \\ \\ \end{array} \\
 & \uparrow & \\
 & \text{columna } j &
\end{array}$$

(1.3) $F_{ij}(a)$ es la matriz resultante al sumar a las componentes de la fila i, las componentes respectivas de la fila j multiplicadas por α.

$$\begin{array}{ccc}
F_{ij}(\alpha) \; = & \begin{pmatrix}
1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & \cdots & \boxed{1} & \cdots & \boxed{\alpha} & \cdots & 0 \\
\vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & \cdots & \boxed{1} & \cdots & 0 \\
\vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1
\end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow \; \text{fila } i \\ \\ \leftarrow \; \text{fila } j \\ \\ \\ \end{array}
\end{array}$$

(1.4) $C_{ij}(a)$ es la matriz resultante al sumar a las componentes de la columna i, las componentes respectivas de la columna j multiplicadas por α.

$$C_{ij}(\alpha) \;=\; \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} & & \text{columna } i & & & & \\ & & \downarrow & & & & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \boxed{1} & \cdots & \boxed{0} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \boxed{\alpha} & \cdots & \boxed{1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccccccc} & & & & \uparrow & & \\ & & & & \text{columna } j & & \end{array} \end{array}$$

Ejemplos 2 En $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ algunos ejemplos de estas matrices son los siguientes:

$$E_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad E_1(\pi) = \begin{pmatrix} \pi & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$F_{32}(-\mathrm{i}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\mathrm{i} & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C_{23}(-\mathrm{i}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\mathrm{i} & 1 \end{pmatrix}.$$

Observaciones 3 Es fácil ver que para todos $i, j \in \{1, ..., n\}$ y $\alpha \in \mathbb{F}$ se satisface las propiedades siguientes :

(3.1) $E_{ij}^2 = \mathrm{I}_n$.

(3.2) Si $\alpha \neq 0$, entonces $E_i(\alpha)E_i(\alpha^{-1}) = \mathrm{I}_n$.

(3.3) $F_{ij}(\alpha)F_{ij}(-\alpha) = \mathrm{I}_n$.

(3.4) $C_{ij}(\alpha)C_{ij}(-\alpha) = \mathrm{I}_n$.

(3.5) $C_{ij}(\alpha) = F_{ij}(\alpha)^{\mathrm{t}} = F_{ji}(\alpha)$.

Las propiedades (3.3) y (3.4) nos permiten concluir que las matrices $F_{ij}(\alpha)$ y

$C_{ij}(\alpha)$ son invertibles. Además,

(3.6) $F_{ij}(\alpha)^{-1} = F_{ij}(-\alpha)$ y $C_{ij}(\alpha)^{-1} = C_{ij}(-\alpha)$. Si $\alpha \neq 0$, entonces por (3.2), $E_i(\alpha)$ es invertible y

(3.7) $E_i(\alpha)^{-1} = E_i(\alpha^{-1})$.

Por lo tanto, una matriz elemental es invertible, si y sólo si, no es de la forma $E_i(0)$ con $1 \leq i \leq n$.

Observaciones 4 (Premultiplicación por matrices elementales.)

Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ tal que $A = (a_{ij}, 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n)$. Luego, para $1 \leq i \leq m$ y $\alpha \in \mathbb{K}$,

$$E_i(\alpha)A = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \alpha & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha a_{i1} & \cdots & \alpha a_{ii} & \cdots & \alpha a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mi} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

En consecuencia, premultiplicar (multiplicar por la izquierda) la matriz A por $E_i(\alpha)$ es equivalente a cambiar la fila i de A por la fila resultante al multiplicar cada componente de la fila i de A por α.

Sean $i, j \in J_m$. Luego,

$$E_{ij}A = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Vemos así que premultiplicar la matriz A por E_{ij} es equivalente a intercambiar en la matriz A, la fila i con la fila j.

De manera análoga se verifica que $F_{ij}(\alpha)A$ es la matriz que se obtiene sumando a las componentes de la fila i, las componentes correspondientes de la fila j multiplicadas por α. Es decir,

$$F_{ij}(\alpha)A = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & \alpha & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1}+\alpha a_{j1} & \cdots & \cdots & a_{in}+\alpha a_{jn} \\ \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Observaciones 5 (Postmultiplicación por matrices elementales.)

Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ tal que $A = (a_{ij}, 1 \le i \le m, 1 \le j \le n)$. Luego, para $1 \le j \le n$ y $\alpha \in \mathbb{K}$, se tiene

$$(5.1) \qquad AE_j(\alpha) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & \alpha a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & \alpha a_{ii} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & \alpha a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Sean $i, j \in J_n$ tal que $i < j$. Entonces,

$$(5.2) \qquad AE_{ij} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mi} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

$$(5.3) \qquad AC_{ij}(\alpha) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i}+\alpha a_{1j} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ & \cdots & & \cdots & & \cdots & \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mi}+\alpha a_{mj} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Por (5.1), la postmultiplicación de A por $E_j(\alpha)$, equivale a multiplicar cada componente de la columna j de A por α. Por otra parte, (5.2) nos dice que la operación de postmultiplicar A por E_{ij}, equivale a intercambiar en A la columna i por la columna j. Finalmente, si postmultiplicamos A por $C_{ij}(\alpha)$, esta operación consiste en sumar a las componentes de la columna i, las correspondientes componentes de la columna j multiplicadas por α.

Nota 6 En atención a lo señalado en los puntos 4 y 5 de esta sección, las operaciones consistentes en pre y post multiplicar por matrices elementales se conocen como operaciones elementales. Si E es una matriz elemental, anotaremos mediante $\overset{E}{\rightarrow}$ la operación consistente en pre o post multiplicar una matriz por E.

Ejemplo 7 Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 5 & 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}$. Calcular $B = E_1(\pi)E_{21}F_{13}(-2)AC_{12}(-1)$.

Solución.

$$A \overset{F_{13}(-2)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} -9 & 2 & -3 & 8 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 5 & 0 & 3 & -2 \end{pmatrix} \overset{E_{21}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 0 \\ -9 & 2 & -3 & 8 \\ 5 & 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\overset{E_1(\pi)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 0 & 2\pi & -\pi & 0 \\ -9 & 2 & -3 & 8 \\ 5 & 0 & 3 & -2 \end{pmatrix} \overset{C_{12}(-1)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} -2\pi & 2\pi & -\pi & 0 \\ -11 & 2 & -3 & 8 \\ 5 & 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, $B = \begin{pmatrix} -2\pi & 2\pi & -\pi & 0 \\ -11 & 2 & -3 & 8 \\ 5 & 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}$.

Definición 8 Sean $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Se dice que

(8.1) A es equivalente por filas a B, si y sólo si, existen $E^1, \ldots, E^k$ matrices elementales invertibles de modo que $E^1 \cdots E^k A = B$.

(8.2) A es equivalente por columnas a B, si y sólo si, existen $E^1, \ldots, E^k$ matrices elementales invertibles de modo que $AE^1 \cdots E^k = B$.

Observación 9 Sean $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Luego,

(9.1) A es equivalente por filas a B, si y sólo si, existe $P \in \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$ invertible tal que $PA = B$.

(9.2) A es equivalente por columnas a B, si y sólo si, existe $Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ invertible tal que $AQ = B$. Nótese además que tanto la equivalencia por filas como la equivalencia por columnas, son relaciones de equivalencia en $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$.

Ejemplo 10 Sea A la matriz en Ejemplo 7; es decir,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 5 & 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Encontrar $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ tal que $PA = B$, donde

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 2\pi & -\pi & 0 \\ -9 & 2 & -3 & 8 \\ 5 & 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Solución. Del Ejemplo 7 se tiene que aplicando las operaciones filas $F_{13}(-2)$, E_{21} y $E_1(\pi)$ a la matriz A, en el orden que se indica, se obtiene la matriz B. Luego, $E_1(\pi)E_{21}F_{13}(-2)A = B$ y por lo tanto, $P = E_1(\pi)E_{21}F_{13}(-2)$ satisface $PA = B$.

Proposición 11 Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ y supongamos que A es equivalente por filas a la matriz I_n. Entonces A es invertible.

Demostración. Existen matrices elementales $E^1, \ldots, E^k$ de modo que $E^1 \cdots E^k A = \mathrm{I}_n$. Luego, $A = (E^k)^{-1} \cdots (E^1)^{-1} = (E^1 \cdots E^k)^{-1}$. En consecuencia, A es invertible y $A^{-1} = E^1 \cdots E^k$. ∎

Observación 12 La demostración de la proposición precedente nos proporciona un método para calcular la matriz inversa de una matriz A cuando ésta existe. En efecto, si $E^1 \cdots E^k A = \mathrm{I}_n$, entonces $A^{-1} = E^1 \cdots E^k \mathrm{I}_n$. Esto significa que las mismas operaciones elementales que transforman A en la matriz I_n, también transforman la matriz $(A\,\mathrm{I}_n)$ en la matriz $(\mathrm{I}_n\,A^{-1})$. Es decir,

(12.1) $E^1 \cdots E^k(A\,\mathrm{I}_n) = (\mathrm{I}_n A^{-1})$, donde $(A\,\mathrm{I}_n)$ (y análogamente $(\mathrm{I}_n A^{-1})$) es la matriz en $\mathcal{M}_{n\times 2n}(\mathbb{K})$ particionada con las submatrices A e I_n.

Ejemplo 13 Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 8 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Hallar (si existe) A^{-1}.

Solución. Consideremos la matriz $(A\,\mathrm{I}_3)$. Mediante las operaciones elementales por filas que transforman A en I_3, obtendremos la transformación de I_3 en A^{-1}.

Tenemos

$$(A\,\mathrm{I}_3) \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 8 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{F_{31}(1)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 8 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\overset{E_2(1/4)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{F_{32}(-2)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\overset{F_{12}(-2)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1/2 & 1 \end{pmatrix} \overset{E_3(-1)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1/2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\overset{F_{13}(2)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 1/2 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1/2 & -1 \end{pmatrix} \overset{F_{23}(-2)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 1/2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -3/4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1/2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1/2 & -2 \\ 2 & -3/4 & 2 \\ -1 & 1/2 & -1 \end{pmatrix}$.

Definición 14 Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Se dice que A es una matriz Escalonada Reducida por Filas (ERF), si y sólo si, se satisface las tres condiciones siguientes:

(14.1) El primer elemento no cero en cada fila no nula es 1, y la columna en que éste aparece es columna de la matriz identidad I_m.

(14.2) Las filas nulas, si las hay, se ubican en los últimos lugares.

(14.3) Si los unos con que comienzan las filas no nulas están en las posiciones $(1, c_1), \ldots, (r, c_r)$, entonces $c_1 < \cdots < c_r$.

Ejemplo 15 Sea $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. ¿Es A equivalente por filas a una matriz ERF?

Solución. Nótese que A no es escalonada reducida por filas. Sin embargo,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{F_{31}(1)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \overset{F_{32}(-3)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\overset{F_{12}(-3)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Luego, A es equivalente por filas a la siguiente matriz ERF:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Observación 16 Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ una matriz ERF.

(16.1) A es triangular superior.

(16.2) Si A no tiene filas nulas, entonces $A = \mathrm{I}_n$.

Teorema 17 Toda matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ es equivalente por filas a una única matriz ERF.

Demostración. Demostremos en primer lugar que A es equivalente por filas a una matriz ERF. Esta demostración la haremos por inducción en m. Si $m = 1$, el resultado es evidente. Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ y supongamos que el resultado es válido para matrices con $m - 1$ filas ($m > 1$).

Si la primera columna de A es nula, entonces $A = \begin{pmatrix} 0 & A_{12} \\ \mathrm{O} & A_{22} \end{pmatrix}$, donde $A_{12} \in \mathcal{M}_{1\times(n-1)}(\mathbb{K})$ y $A_{22} \in \mathcal{M}_{(m-1)\times(n-1)}(\mathbb{K})$.

Aplicando la hipótesis de inducción a la matriz A_{22}, se tiene que A_{22} es equivalente por filas a una matriz E_{22} ERF. Luego, A es equivalente por filas a la matriz

$$B = \begin{pmatrix} 0 & A_{12} \\ \mathrm{O} & E_{22} \end{pmatrix}.$$

Si la primera columna de A no es nula, entonces A es equivalente por filas a una matriz de la forma $\begin{pmatrix} 1 & A_{12} \\ \mathrm{O} & A_{22} \end{pmatrix}$, con $A_{12} \in \mathcal{M}_{1\times(n-1)}(\mathbb{K})$ y $A_{22} \in \mathcal{M}_{(m-1)\times(n-1)}(\mathbb{K})$.

Aplicamos nuevamente la hipótesis de inducción para obtener que A_{22} es equivalente por filas a una matriz E_{22} ERF. Así, A es equivalente por filas a la matriz

$$C = \begin{pmatrix} 1 & A_{12} \\ \mathrm{O} & A_{22} \end{pmatrix}.$$

Como B y C son matrices equivalentes por filas a una matriz ERF, entonces A también lo es. Demostremos ahora la unicidad. Sea $E \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ una matriz ERF y denotemos por $E_1, \ldots, , E_m$ las correspondientes filas de E. Luego,

$$E = \begin{pmatrix} E_1 \\ \vdots \\ E_m \end{pmatrix}.$$

Sea $W =< E_1, \ldots, , E_m >$ el subespacio vectorial de $\mathcal{M}_{1\times n}(\mathbb{K})$ generado por las filas de E. Supongamos que E no es la matriz nula. Luego, existen $k(1), \ldots, k(r) \in \mathbb{N}$ tales que $1 \le k(1) \le \cdots \le k(r) \le n$ y para todo $i \in \{1, \ldots, r\}$, la $k(i)-$ésima columna de E es la $i-$ésima columna de la matriz identidad I_r, donde r es el número de filas no nulas de E. Nótese que

(17.1) si $v = (v_1, \ldots, v_n) \in W$ es tal que $v_{k(i)} = 0$ para todo $i \in \{1, \ldots, r\}$, entonces $v = (0, \ldots, 0)$.

Sea $F = (F_{ij}; 1 \le i \le m, 1 \le j \le n) \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ otra matriz ERF tal que F es equivalente por filas a E. Luego, existe $P = (P_{ij}; 1 \le i \le m, 1 \le j \le n) \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ invertible tal que $E = PF$.

Sean $F_1, \ldots, F_m$ y $P_1, \ldots, P_m$ las correspondientes filas de F y P. Entonces,

$$E = \begin{pmatrix} E_1 \\ \vdots \\ E_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1 F \\ \vdots \\ P_m F \end{pmatrix}.$$

Así, para todo $i \in \{1, \ldots, r\}$, $E_i = P_i F = \sum_{k=i}^{m} P_{ik} F_k$. Luego $W =< F_1, \ldots, , F_m >$, y como las filas no nulas de E, y también las de F, son linealmente independientes, $W =< E_1, \ldots, , E_r >$ y entonces, F también tiene r filas no nulas.

Sean $k'(1), \ldots, k'(r) \in \mathbb{N}$ tales que $1 \leq k'(1) \leq \cdots \leq k'(r) \leq n$ y para todo $i \in \{1, \ldots, r\}$, la $k'(i)-$ésima columna de F es la $i-$ésima columna de la matriz identidad I_r. Se tiene,

$$\begin{aligned} E_i &= \textstyle\sum_{k=1}^{m} P_{ik} F_k \\ &= (\textstyle\sum_{k=1}^{m} P_{ik} F_{k1}, \ldots, \sum_{k=1}^{m} P_{ik} F_{kn}) \\ &= (0, \ldots, \textstyle\sum_{k=1}^{m} P_{ik} F_{kk(i)}, \ldots, \sum_{k=1}^{m} P_{ik} F_{kn}) \\ &= \textstyle\sum_{k=1}^{m} P_{ik} (0, \ldots, F_{kk(i)}, \ldots, F_{kn}). \end{aligned}$$

De aquí se obtiene que $k(i) \leq k'(i)$ para todo $i \in \{1, \ldots, r\}$. Análogamente, $k'(i) \leq k(i)$. Por lo tanto, para todo $i \in \{1, \ldots, r\}$, $k(i) = k'(i)$. Por lo tanto, $E - F$ es una matriz cuyas filas pertenecen a W y las columnas correspondientes a los lugares $k(1), \ldots, k(r)$ son nulas. Sigue entonces de (17.1) que $E = F$. Si E es la matriz nula, entonces es evidente que E no puede ser equivalente a una matriz no nula ERF. Esto concluye la demostración. ∎

Notación 18 Sean $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ y $f : \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_{m\times 1}(\mathbb{K})$ tal que $f(x) = Ax$. Anotaremos mediante $R(A)$ el recorrido de f, es decir, $R(A) = \{Ax : x \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K})\}$.

Proposición 19 Para cada $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, $R(A)$ es el subespacio vectorial de $\mathcal{M}_{m\times 1}(\mathbb{K})$ generado por las columnas de A.

Demostración. Sean $A_1, \ldots, A_n$ las columnas de A y $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K})$.

Luego, $Ax = (A_1 \dots A_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 A_1 + \cdots + x_n A_n$. Por lo tanto, $R(A)$ es el subespacio vectorial de $\mathcal{M}_{m\times 1}(\mathbb{K})$ generado por las columnas de A. Esto concluye la demostración. ∎

Definición 20 Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. El rango de A se define como la dimensión de $R(A)$. Anotaremos el rango de A como $\mathrm{Rg}(A)$.

Observación 21 Si $E \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ es una matriz ERF, entonces el número de filas no nulas de E, coincide con el número de columnas de E que son columnas de la matriz identidad I_m. En consecuencia, $\mathrm{Rg}(E)$ es el número de filas no nulas de E.

Ejemplo 22 Sea $E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Calcular $\mathrm{Rg}(E)$.

Solución. Notamos que E es una matriz ERF con 2 filas no nulas y por supuesto, con 2 columnas de la matriz identidad I_3. Por lo tanto, $\mathrm{Rg}(E) = 2$. En este caso, $R(A)$ es generado por las columnas $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Proposición 23 Sean $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ dos matrices equivalentes por filas. Entonces, $\mathrm{Rg}(A) = \mathrm{Rg}(B)$.

Demostración. Por (9.1), existe $P \in \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$ tal que $PA = B$. Sean $A_1, \dots, A_n$ las columnas de A y $B_1, \dots, B_n$ las columnas de B. Luego,

$$(23.1) \qquad (PA_1 \dots PA_n) = (B_1 \dots B_n).$$

Supongamos por el momento que B es una matriz ERF. Sean $r = \mathrm{Rg}(B)$ y $B_{i_1}, \dots, B_{i_r}$ las columnas de B que son columnas de la matriz identidad I_m. Demostremos que $\{A_{i_1}, \dots, A_{i_r}\}$ es un conjunto de vectores linealmente independientes que además genera $R(A)$. Sean $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathbb{K}$ tales que $\alpha_1 A_{i_1} + \cdots + \alpha_r A_{i_r} = \mathrm{O}$. Multiplicando ambos miembros de esta igualdad por la matriz P y teniendo en cuenta (23.1), obtenemos $\alpha_1 B_{i_1} + \cdots + \alpha_r B_{i_r} = \mathrm{O}$.

Por lo tanto, $\alpha_1 = \cdots = \alpha_r = 0$, y en consecuencia, $\{A_{i_1}, \ldots, A_{i_r}\}$ es un conjunto de vectores linealmente independiente. Sea $x \in R(A)$. Luego, existen $\beta_1, \ldots, \beta_n \in \mathbb{K}$ tales que $x = \beta_1 A_1 + \cdots + \beta_n A_n$. Multiplicando esta igualdad por P obtenemos que $Px \in R(B)$ y en consecuencia existen $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in \mathbb{K}$ tales que $Px = \alpha_1 B_{i_1} + \cdots + \alpha_r B_{i_r}$. Tenemos así que

$$x = \alpha_1 P^{-1} B_{i_1} + \cdots + \alpha_r P^{-1} B_{i_r} = \alpha_1 A_{i_1} + \cdots + \alpha_r A_{i_r}.$$

Por lo tanto, $\{A_{i_1}, \ldots, A_{i_r}\}$ genera $R(A)$.

Hemos demostrado así que $\mathrm{Rg}(A) = \mathrm{Rg}(B)$ en el caso que B es una matriz ERF. Si este no es el caso, entonces B es equivalente por filas a una matriz ERF E y en consecuencia, $\mathrm{Rg}(B) = \mathrm{Rg}(E)$. Como A es equivalente por filas a B, entonces también A es equivalente por filas a E. Luego, $\mathrm{Rg}(A) = \mathrm{Rg}(E)$ y por lo tanto, $\mathrm{Rg}(A) = \mathrm{Rg}(B)$, concluyendo la demostración. ■

Corolario 24 *Sea*$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Luego, A es invertible, si y sólo si, $\mathrm{Rg}(A) = n$.

Ejemplo 25 Sea $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calcular $\mathrm{Rg}(A)$.

Solución. En el Ejemplo 15, demostramos que esta matriz A es equivalente por filas a la matriz E del Ejemplo 22. Por lo tanto, $\mathrm{Rg}(A) = \mathrm{Rg}(E) = 2$.

Ejercicios propuestos

1. Sean $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ y $B, C \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K})$. Demuestre que si $(A\, B)$ es equivalente por filas a $(\mathrm{I}_n C)$ entonces $C = A^{-1}B$.

2. Si A es equivalente a B realizando las operaciones elementales $F_{21}(2)$, $F_{31}(-1)$, $C_{21}(-2)$, $C_{31}(1)$, $C_{41}(-2)$, $F_2(-1)$, $F_{32}(2)$, $C_{32}(2)$ y $C_{42}(4)$, encuentre $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ y $Q \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ tal que $B = PAQ$, con $A \in \mathcal{M}_{3\times 4}(\mathbb{R})$.

Respuesta: $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ -5 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ y $Q = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 10 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Calcule $p, q \in \mathbb{R}$ de modo que las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & . & . & -1 & . & 3 \\ -2 & . & . & 2 & . & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & . & . & p & . & 0 \\ 2 & . & . & q & . & 1 \end{pmatrix}$ en $\mathcal{M}_{2\times 6}(\mathbb{R})$ sean equivalentes por filas.

Respuesta: $p = -1$ y $q = -2$.

4. Encuentre la matriz escalonada reducida por filas equivalente a la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Respuesta: $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

.

5. Sean $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & -3 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

Demuestre que B y C son equivalentes por filas.

6. Determine si existen $x, y \in \mathbb{R}$ de modo que las matrices $\begin{pmatrix} 4 & x & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 6 \\ -1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & y \\ 4 & 5 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ sean equivalentes por filas. Justifique.

Respuesta: No existen.

7. Sea $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Encuentre A^{-1}.

Respuesta:$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ -1/9 & 1/3 & 0 & 0 \\ 1/36 & -1/12 & 1/4 & 0 \\ -1/108 & 1/36 & -1/12 & 1/3 \end{pmatrix}$

8. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Demuestre que A es invertible, si y sólo si, $\mathrm{Rg}(A) = n$.

9. Sea $A = \begin{pmatrix} -5 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(9.1) Demuestre que A es invertible y calcule A^{-1}.

(9.2) Exprese A como producto de matrices elementales.

Respuestas:

(9.1) $A^{-1} == \begin{pmatrix} -5 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. .

(9.2) $A = F_{13}(1/2)F_3(3/2)F_{32}(-1)F_{31}(-5)F_1(2)F_2(-1)F_{13}$.

10. Sea $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 1 & b & a \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Determine las condiciones sobre a y b en $\mathbb{R}$ para que la matriz A tenga (si es posible)

(10.1) Rango 1. (10.2) Rango 2. (10.3) Rango 1. (10.4) Inversa.

Respuestas:

(10.1) No existen a y b.

(10.2) $b - a + 1 = 0$ ó $a = -1$.

(10.3) $a \neq -1$ y $b - a + 1 \neq 0$.

(10.4) $a \neq -1$ y $b - a + 1 \neq 0$.

4. Sistemas de ecuaciones

Definición 1 Un sistema lineal de ecuaciones es una ecuación de la forma

(1.1) $Ax = b$, donde $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ y $b \in \mathcal{M}_{m\times 1}(\mathbb{K})$.

Denotaremos por $S(A,b)$ el conjunto de soluciones de (1.1); es decir,

(1.2) $S(A,b) = \{x \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K}) : Ax = b\}$.

Si $b = \mathrm{O}$, entonces se dice que $S(A,\mathrm{O})$ es el conjunto solución de la ecuación homogénea.

Se verifica fácilmente que $S(A,\mathrm{O})$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K})$.

Teorema 2 Sean $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, $b \in \mathcal{M}_{m\times 1}(\mathbb{K})$ y $x_p \in S(A,b)$. Entonces, $x \in S(A,b)$, si y sólo si, existe $x_h \in S(A,\mathrm{O})$ tal que $x = x_p + x_h$.

Demostración. Si $x_h \in S(A,\mathrm{O})$, entonces es claro que $x_p + x_h \in S(A,b)$. Recíprocamente, si $x \in S(A,b)$, entonces $x - x_p \in S(A,\mathrm{O})$ (¿Por qué?). Es decir, existe $x_h \in S(A,\mathrm{O})$ tal que $x = x_p + x_h$, lo cual concluye la demostración. ∎

Observaciones 3 Sean $A, \widetilde{A} \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ y $b, \widetilde{b} \in \mathcal{M}_{m\times 1}(\mathbb{K})$. Supongamos además que las matrices particionadas $(A\,b)$ y $(\widetilde{A}\,\widetilde{b})$ son equivalentes por filas. Luego, existe $P \in \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$ tal que $P(A\,b) = (\widetilde{A}\,\widetilde{b})$. Es decir, $(PA\,Pb) = (\widetilde{A}\,\widetilde{b})$ y entonces

(3.1) $PA = \widetilde{A}$ y $Pb = \widetilde{b}$.

Debido a que P es invertible, las soluciones de $PAx = Pb$ son las mismas que las soluciones de $Ax = b$. Sigue entonces de (3.1) que los sistemas $Ax = b$ y $\widetilde{A}x = \widetilde{b}$ tienen las mismas soluciones. Por lo tanto, en vez de resolver $Ax = b$, transformamos mediante operaciones por fila la matriz $(A\,b)$ en una matriz $(\widetilde{A}\,\widetilde{b})$ con una expresión más sencilla (por ejemplo que sea ERF). Luego, resolvemos el sistema $\widetilde{A}x = \widetilde{b}$.

Ejercicio 4 Determinar el conjunto solución del siguiente sistema lineal de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcrcrcr} 3x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 & + & x_4 & - & x_5 & = & 1 \\ -2x_1 & - & 2x_2 & & & + & 3x_4 & & & = & 0 \\ x_1 & & & - & 2x_3 & + & 4x_4 & - & x_5 & = & 1 \end{array}\right| .$$

Determinar además el conjunto de soluciones de la ecuación homogénea y una base de este subespacio.

Solución. Este sistema puede expresarse como $Ax = b$, donde

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 4 & -1 \end{pmatrix} \text{ y } b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ahora bien,

$$\begin{aligned} (A\,b) &= \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ -2 & -2 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 4 & -1 & 1 \end{pmatrix} \overset{F_{23}(2)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & -4 & 11 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & 4 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &\overset{F_{13}(-3)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & -11 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & -4 & 11 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & 4 & -1 & 1 \end{pmatrix} \overset{F_{21}(1)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & -11 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 4 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &\overset{E_{13}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 4 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & -11 & 2 & -2 \end{pmatrix} \overset{E_{21}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 4 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & -11 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\overset{E_2(1/2)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 4 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -11/2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Luego, el sistema es equivalente a

$$\left.\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x_1 & & & - & 2x_3 & + & 4x_4 & - & x_5 & = & 1 \\ & & x_2 & + & 2x_3 & - & \frac{11}{2}x_4 & + & x_5 & = & -1 \end{array}\right| .$$

Por lo tanto el conjunto solución del sistema es

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_5 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{5\times 1}(\mathbb{R}) : \right.$$

$$\left. \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -4 \\ 11/2 \end{pmatrix} + x_5 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Nótese que todo $x \in S$ es de la forma

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -4 \\ 11/2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

donde $x_3, x_4, x_5 \in \mathbb{R}$.

Notamos además que $x_p = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ es una solución particular del sistema y que toda solución de la ecuación homogénea tiene la forma

$$x_h = x_3 \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -4 \\ 11/2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{4.2}$$

con $x_3, x_4, x_5 \in \mathbb{R}$.

Por lo tanto, (4.2) expresa lo señalado en el Teorema 2, a saber, que toda solución del sistema se representa como suma de una solución particular más una solución de la ecuación homogénea.

De (4.2) se tiene que los vectores

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 11/2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

generan el espacio de soluciones de la ecuación homogénea. Además, se verifica facilmente que estos vectores son linealmente independientes. Por lo tanto,

$$\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 11/2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

es una base del espacio de soluciones de la ecuación homogénea.

Observaciones 5 Sean $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, $b \in \mathcal{M}_{m\times 1}(\mathbb{K})$ y consideremos el sistema lineal de ecuaciones $Ax = b$.

(5.1) El sistema posee solución, si y sólo si, $b \in R(A)$.

(5.2) Supongamos que $(A\, b)$ es equivalente por filas a $(\widetilde{A}\,\widetilde{b})$ y que esta última matriz es ERF de rango r. Luego, al resolver el sistema $\widetilde{A}x = \widetilde{b}$, se tendrá r incógnitas expresadas en función de las $n - r$ restantes, las cuales llamaremos variables libres.

Por lo tanto, si $(x_1 \ldots x_n)^{\mathrm{t}}$ es solución del sistema original, existen r incógnitas $x_{i_1}, \ldots, x_{i_r}$ que se expresan en función de $n - r$ variables libres.

Teorema 6 Sean $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, $b \in \mathcal{M}_{m\times 1}(\mathbb{K})$ y consideremos el sistema lineal de ecuaciones $Ax = b$.

(6.1) El sistema posee solución, si y sólo si, $\mathrm{Rg}(A) = \mathrm{Rg}(A\, b)$.

(6.2) Si $\mathrm{Rg}(A) = \mathrm{Rg}(A\, b) < n$, entonces el sistema posee infinitas soluciones.

(6.3) Si $\mathrm{Rg}(A) = \mathrm{Rg}(A\, b) = n$, entonces el sistema posee una única solución.

Demostración. Por (5.1) el sistema posee solución, si y sólo si, $b \in R(A)$, lo cual a su vez es equivalente a que $R(A) = R(A\, b)$. Luego, si existe solución para el sistema, entonces $\mathrm{Rg}(A) = \mathrm{Rg}(A\,b)$. Recíprocamente, como $R(A) \subseteq R(Ab)$, entonces la condición $\mathrm{Rg}(A) = \mathrm{Rg}(A\,b)$ implica que $R(A) = R(A\,b)$ y por lo tanto, el sistema tiene solución. Esto prueba (6.1).

Supongamos que $\mathrm{Rg}(A) = \mathrm{Rg}(A\,b)$. Por Teorema 2, toda solución del sistema es de la forma $x = x_p + x_h$ con $x_h \in S(A, \mathrm{O})$. Por lo tanto, bajo el supuesto que $\mathrm{Rg}(A) = \mathrm{Rg}(A\,b)$ (existe solución), el sistema posee una única solución, si y sólo si, $S(A, \mathrm{O}) = \{\mathrm{O}\}$, lo cual significa que la solución no tiene variables libres y en consecuencia, $\mathrm{Rg}(A) = n$. Esto prueba (6.2) y (6.3), y además concluye la demostración. ∎

Ejemplo 7 Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & -2 \end{pmatrix}$.

(7.1) Para $b = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{\mathrm{t}}$, determinar si $Ax = b$ posee solución.

(7.2) ¿Existe $b \in \mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R})$ tal que $Ax = b$ posee una única solución?

(7.3) Si $b = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}^{\mathrm{t}}$, calcular $S(A, b)$.

Solución.

(7.1) Tenemos que $\mathrm{Rg}(A) = 2$ y si $b = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{\mathrm{t}}$, entonces $\mathrm{Rg}(A\,b) = 3$ (¿Por qué?). Por (6.1) se tiene entonces que

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

no tiene solución.

(7.2) La respuesta es negativa, pues $\mathrm{Rg}(A) < 4$. Más aun, no existen $A \in \mathcal{M}_{3\times 4}(\mathbb{R})$ y $b \in \mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R})$ tales que $Ax = b$ posea solución única. Esto es porque en este caso $\mathrm{Rg}(A) = 3$, y para que exista solución única se debe tener $\mathrm{Rg}(A) = 4$.

(7.3) Nótese que

$$(A\,b) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

es equivalente por filas a la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -10 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

la cual es una matriz ERF de rango 2. Luego, $\mathrm{Rg}(A) = \mathrm{Rg}(A\,b) = 2 < 4$ y por (6.2) el sistema tiene infinitas soluciones.

El sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

es equivalente entonces al siguiente:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & & & & -10x_4 & = & -2 \\ & & x_3 & + & 2x_4 & = & 1 \end{array}\right|.$$

Luego, $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}^{\mathrm{t}}$ es solución del sistema original, si y sólo si,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 10 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

En este caso las variables libres son x_2 y x_4, aun cuando x_2 no aparece explícitamente en esta última igualdad.

La solución general tiene la forma

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto,

$$S(A,b)=\left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{4\times 1}(\mathbb{R}):\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\0\\1\\0\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}+x_4\begin{pmatrix}10\\0\\-2\\1\end{pmatrix}\right\}.$$

Vale la pena notar que toda solución de la ecuación homogénea tiene la forma

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=x_2\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}+x_4\begin{pmatrix}10\\0\\-2\\1\end{pmatrix}$$

y que $\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}10\\0\\-2\\1\end{pmatrix}\right\}$ es una base del espacio de soluciones de la ecuación homogénea.

Ejercicios propuestos

1. Sea $A=\begin{pmatrix}2&1&1\\2&3&4\\-1&-1&-2\end{pmatrix}$. Resuelva el sistema AX = 3X, donde $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$.

$$\textit{Respuesta: } S=\left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R}):\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=t\begin{pmatrix}-2\\-3\\1\end{pmatrix},t\in\mathbb{R}\right\}.$$

2. Resuelva el sistema siguiente:

$$\begin{pmatrix}1&0&-1&0&5\\0&1&2&3&1\\4&2&1&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Respuesta:

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{5\times 1}(\mathbb{R}) : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = x_4 \begin{pmatrix} 6 \\ -15 \\ 6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 \begin{pmatrix} 18 \\ -47 \\ 23 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

3. Encuentre el conjunto solución y determine una solución particular del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ x_1 & & & & & & & = & x_2 + 1 \end{array}\right|.$$

Respuesta:

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4\times 1}(\mathbb{R}) : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, s, t \in \mathbb{R} \right\}$$ y

una solución particular es $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

4. Considere el sistema siguiente:

$$\left.\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 1 \\ 4x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & = & 3 \end{array}\right|.$$

(4.1) Encuentre el conjunto de soluciones del sistema homogéneo asociado.

(4.2) Determine el conjunto de soluciones del sistema.

Respuesta:

(4.1) $$\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R}) : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

(4.2) $$\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R}) : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

5. Encuentre condiciones sobre $\lambda \in \mathbb{R}$ para que el sistema

$$\begin{array}{ccccccc|} \lambda x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ x_1 & + & \lambda x_2 & + & x_3 & = & \lambda \\ x_1 & + & x_2 & + & \lambda x_3 & = & \lambda^2 \\ \hline \end{array}$$

(5.1) tenga solución. (5.2) tenga solución única.

(5.3) tenga infinitas soluciones. (5.4) no tenga soluciones.

Respuestas:

(5.1) $\lambda \neq 2$. (5.2) $\lambda \neq 1$ y $\lambda \neq 2$.

(5.3) $\lambda = 1$. (5.4) $\lambda = -2$.

6. Encuentre condiciones sobre $a, b, c \in \mathbb{R}$ para que el sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 6 & -1 \\ 6 & 4 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ c \\ b \end{pmatrix}$$

(6.1) no tenga solución.

(6.2) tenga única solución.

(6.3) tenga infinitas soluciones y encuentre el conjunto de soluciones.

Respuestas:

(6.1) $c \neq 6$ ó ($a = 2$ y $b \neq 8$).

(6.2) $c = 6$ y $a \neq 2$.

(6.3) $c = 6$, $a = 2$, $b = 8$ y

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R}) : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ -1/4 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

5. Determinante de una matriz

Definición 1 Sea $\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ una función tal que

(1.1) $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ $(A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}))$.

(1.2) $\det(E_1(a)) = \alpha$, $(\alpha \in \mathbb{K})$.

Esta función det se conoce como determinante, y si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, el determinante de A es el valor $\det(A)$, el cual también se denota por $|A|$.

Teorema 2 Sean $(i, j) \in J_n \times J_n$ y $\alpha \in \mathbb{K}$. Entonces,

(2.1) $|E_i(\alpha)| = \alpha$, (2.2) $|F_{ij}(\alpha)| = 1$, y (2.3) $|E_{ij}| = -1$.

Demostración.

(2.1) Nótese que $E_i(\alpha) = E_{1i}E_1(\alpha)E_{1i}$. Luego, por (1.1),

$$\begin{aligned} E_i(\alpha) &= |E_{1i}||E_1(\alpha)||E_{1i}| \\ &= |\mathrm{I}_n||E_1(\alpha) && \text{pues } \mathrm{I}_n = E_{1i}^2 \\ &= |E_1(\alpha)| && \text{pues } \mathrm{I}_n = E_1(1) \\ &= \alpha && \text{por (1.2).} \end{aligned}$$

(2.2) Si $\alpha = 0$, entonces $F_{ij}(\alpha) = \mathrm{I}_n$ y luego $|F_{ij}(\alpha)| = 1$.

Supongamos entonces que $\alpha \neq 0$. Luego, $F_{ij}(\alpha) = E_j(\alpha^{-1})F_{ij}(1)E_j(\alpha)$. Por consiguiente, sigue de (1.1) y (2.1) que $|F_{ij}(\alpha)| = |F_{ij}(1)|$. Demostremos entonces que $|F_{ij}(1)| = 1$. Tenemos que $F_{ij}(1)^2 = F_{ij}(2)$ y $|F_{ij}(2)| = |F_{ij}(1)|$. Esto implica que $|F_{ij}(1)|^2 = |F_{ij}(1)|$ y luego, $|F_{ij}(1)| = 1$ ó $|F_{ij}(1)| = 0$. Descartamos este último caso pues $F_{ij}(1) = \mathrm{I}_n$. Por lo tanto, $|F_{ij}(\alpha)| = 1$.

Queda como ejercicio la demostración de (2.3). ∎

Observación 3 Sean $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Si B se obtiene de A mediante una operación elemental, entonces por (1.1), el determinante de B es el producto del determinante de A por el determinante de la matriz elemental correspondiente.

Las propiedades siguientes son consecuencia del teorema precedente:

(3.1) Si B se obtiene de A, al dividir una fila (o columna) de A por α, entonces $|A| = \alpha|B|$.

(3.2) Si B se obtiene de A, al sumar a la fila i de A la fila j multiplicada por α, entonces $|A| = |B|$.

(3.3) Si B se obtiene de A, intercambiando dos filas o dos columnas, entonces $|A| = -|B|$.

Ejemplo 4 Calcular $|A|$ si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

Solución. Tenemos que

$$\begin{aligned} |A| &= \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \\ &= -2 \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= -2 \det(E_2(4)) = -8. \end{aligned}$$

Teorema 5 Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Entonces las tres proposiciones siguientes son equivalentes:

(5.1) A es invertible.

(5.2) $\mathrm{Rg}(A) = n$.

(5.3) $|A| \neq 0$.

Demostración. Por Corolario 24 en Sección 3, tenemos que (5.1) es equivalente a (5.2).

Además, A es equivalente por filas a una matriz ERF que denotamos por E. Luego, existe $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ invertible tal que $PA = E$.

Si $\mathrm{Rg}(A) = n$, entonces por Observación (16.2) en Sección 3, se tiene que $E = \mathrm{I}_n n$ y entonces $|P||A| = 1$, lo cual implica (5.3).

Como P es producto de matrices elementales invertibles, entonces $|P| \neq 0$. De modo que si asumimos $|A| \neq 0$, entonces $|E| \neq 0$ y así, E no tiene filas nulas. Por lo tanto, $\mathrm{Rg}(A) = \mathrm{Rg}(E) = n$, lo cual concluye la demostración. ∎

Ejemplo 6 Sea A como en Ejemplo 4; es decir, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$. ¿Es A invertible?

Respuesta: Sí. Por Ejemplo 4, $|A| = -8 \neq 0$, y por Teorema 5, A es invertible.

Observaciones 7 Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

(7.1) Si $A = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ es una matriz diagonal con valores $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ en la diagonal, entonces $A = E_1(\lambda_1) \cdots E_n(\lambda_n)$ y por lo tanto, $|A| = \lambda_1 \cdots \lambda_n$.

(7.2) Si $A = (a_{ij}; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n)$ es una matriz triangular superior o inferior, entonces A es equivalente por filas y columnas a la matriz $\mathrm{Diag}(a_{11}, \ldots, a_{nn})$ y en la transformación sólo intervienen matrices elementales del tipo $F_{ij}(\alpha)$ y $F_{ij}(\alpha)$, cuyos determinantes son 1. Por lo tanto, $|A| = a_{11} \cdots a_{nn}$.

(7.3) Si A tiene una fila o columna nula, entonces $|A| = 0$. Esto ocurre debido a que en este caso, $\mathrm{Rg}(A) < n$.

Ejercicios propuestos

1. Calcule el determinante de cada una de las matrices siguientes:

(1.1) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{i} \end{pmatrix}$. (1.2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & -\mathrm{i} & 0 \\ -1 & 0 & \pi \end{pmatrix}$. (1.3) $\begin{pmatrix} 2 & \mathrm{i} & \pi \\ 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 3 & -1 \end{pmatrix}$.

Respuestas: (1.1) $2\mathrm{i}\sqrt{3}$. (1.2) $-\pi\mathrm{i}$. (1.3) 0.

2. Mediante el uso de matrices elementales, calcule el determinante de las matrices siguientes:

$$(2.1)\quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.2)\quad \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Respuestas: (2.1) 8. (2.2) 3.

3. Calcule el determinante de C en función de x y α, donde

$$C = \begin{pmatrix} x+\alpha & x & x & x \\ x & x+\alpha & x & x \\ x & x & x+\alpha & x \\ x & x & x & x+\alpha \end{pmatrix}$$

Respuesta: $\alpha^3(4x+\alpha)$.

4. Calcule el determinante de la matriz siguiente:

$$\begin{pmatrix} x+1 & x^2-1 & 2x+2 & 0 \\ 1 & x-1 & y & y \\ x & x^2-x & 5 & 5 \\ 1 & 1-x & y & y+t \end{pmatrix}$$

Respuesta: $4(x^2-1)(5-xy)$.

5. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 2 & 1 & b \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Establecer condiciones sobre $a, b \in \mathbb{R}$ para que A sea una matriz invertible.

Respuesta: $a \neq 2$ y $b \neq 2$.

6. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{pmatrix}$. Demuestre que A es invertible, si y sólo si, $b \neq a$, $c \neq a$ y $c \neq b$.

7. Demuestre que si N es nilpotente entonces N no es invertible.

8. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tal que $A^2+\mathrm{I}_n-A=0$. Demuestre que A es invertible y encuentre A^{-1}.

Respuesta: $A^{-1}=\mathrm{I}_n-A$.

6. Expansión de Laplace

Teorema 1 Sean $A_1,\dots,A_n \in \mathcal{M}_n \times 1(\mathbb{K})$ y $A=(A_n)$. Supongamos además que $A_i = A_{i1}+A_{i2}$, donde $i \in J_n$ y $A_{i1}, A_{i2} \in \mathcal{M}_n \times 1(\mathbb{K})$. Entonces,

$$(1.1)\qquad \det(A)=\det(A_1,\dots,A_{i-1},A_{i1},\dots,A_n)+\det(A_1,\dots,A_{i-1},A_{i2},\dots,A_n).$$

Demostración. Por la Observación (3.3) de la sección precedente, asumiremos sin pérdida de generalidad que $i=1$. Dividamos la demostración en dos casos.

Caso 1. $A_2,\dots,A_n$ son linealmente dependientes.

En este caso, el rango de cada una de las tres matrices involucradas en (1.e)s menor que n. Luego, sigue del Teorema 5 de la sección precedente que el determinante de cada una de estas tres matrices es cero.

Caso 2. $A_2,\dots,A_n$ son linealmente independientes. En esta situación, existe $\xi \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K})$ tal que $\{\xi, A2,\dots,An\}$ es una base de $\mathcal{M}n \times 1(\mathbb{K})$ y entonces, existen $\alpha,\alpha_2,\dots,\alpha_n \in \mathbb{K}$ tal que

$$A_{11}=\alpha\xi+\alpha_2 A2+\cdots+\alpha_n A_n.$$

Luego,

$$\begin{aligned}(A_{11},A_2,\dots,A_n) &= (\alpha\xi+\alpha_2A_2+\cdots+\alpha_nA_n,A_2,\dots,A_n)\\ &= F_{n1}(\alpha_n)\cdots F_{31}(\alpha_3)(\alpha\xi,A_2,\dots,A_n)C_{12}(\alpha_2)\cdots C_{1n}(\alpha_n).\end{aligned}$$

y entonces,

$$(1.2)\qquad \det(A_{11},A_2,\dots,A_n)=\alpha\det(\xi,A_2,\dots,A_n).$$

Análogamente,

$$(1.3)\qquad \det(A_{12},A_2,\dots,A_n)=\beta\det(\xi,A_2,\dots,A_n),$$

donde $A_{12}=\beta\xi++\beta_2A_2+\cdots+\beta_nA_n$, con $\beta,\beta_2,\dots,\beta_n\in\mathbb{K}$.

Como

$$A_1 = A_{11} + A_{12} = (\alpha + \beta)\xi + (\alpha_2 + \beta_2)A_2 + \cdots + (\alpha_n + \beta_n)A_n,$$

se tiene también que

$$(1.4) \qquad \det(A_1, A_2, \ldots, A_n) = (\alpha + \beta)\det(\xi, A_2, \ldots, A_n).$$

Por lo tanto, de (1.2), (1.3), y (1.4), se obtiene (1.1). Esto completa la demostración. ∎

Definiciones 2 Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tal que $A = (a_{ij}; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n)$. Se define el menor de a_{ij} como la submatriz de A en $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$ que se obtiene eliminando en la matriz A, la fila i y la columna j. Denotaremos el menor de a_{ij} mediante $\mathrm{M}_{ij}(A)$.

El cofactor de a_{ij} es el valor definido por $\mathrm{cof}_{ij}(A) = (-1)^{i+j}|\mathrm{M}ij(A)|$.

Ejemplo 3 Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Calcular $\mathrm{M}_{13}(A)$, $\mathrm{M}_{22}(A)$, $\mathrm{cof}_{13}(A)$ y $\mathrm{cof}_{22}(A)$.

Solución. Se tiene que $\mathrm{M}_{13}(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $\mathrm{M}_{22}(A) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Además, $\mathrm{cof}_{13}(A) = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$ y $\mathrm{cof}_{22}(A) = \det\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$.

Lema 4 Sea $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ una matriz de la forma $B = \begin{pmatrix} 1 & a \\ \mathrm{O} & M_{11}(B) \end{pmatrix}$.

Entonces, $\det(B) = \det(M_{11}(B))$.

Demostración. Sean $E_1, \ldots, E_t$ matrices elementales tales que $E_1 \cdots E_t = M_{11}(B)$. Sea $C = \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{O} \\ \mathrm{O} & M_{11}(B) \end{pmatrix}$.

Luego,

$$(4.1) \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{O} \\ \mathrm{O} & E_1 \cdots E_t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{O} \\ \mathrm{O} & E_1 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{O} \\ \mathrm{O} & E_t \end{pmatrix}.$$

Como para cada $i \in J_n$, Ei y $\begin{pmatrix} 1 & O \\ O & E_i \end{pmatrix}$ son matrices elementales del mismo tipo, entonces sus determinantes son iguales. Se tiene además que B es equivalente por columnas a C y $\det(B) = \det(C)$. Luego, por (4.1)

$$\begin{aligned} \det(B) &= \det \begin{pmatrix} 1 & O \\ O & E_i \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 1 & O \\ O & E_i \end{pmatrix} \\ &= \det(E_1) \cdots \det(E_t) \\ &= \det(E_1 \cdots E_t) \\ &= \det(M_{11}(B)). \end{aligned}$$

Por lo tanto, la demostración está completa. ■

El teorema siguiente se conoce como Expansión de Laplace.

Teorema 5 Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tal que $A = (a_{ij}; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n)$. Entonces

(5.1) $\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \mathrm{cof}_{ij}(A)$ para todo $j \in J_n$.

(5.2) $\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \mathrm{cof}_{ij}(A)$ para todo $i \in J_n$.

Demostración. Sean $A_1, \ldots, A_n$ las columnas de A. Luego, por Observación (3.3) en Sección 5, se tiene

$$\det(A) = (-1)^{j-1} \det(A_j, A_1, \ldots, A_{j-1}, A_{j+1}, \ldots, A_n).$$

Denotando por $e_1, \ldots, e_n$ los vectores de la base canónica en $\mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K})$, se tiene que para cada $j \in J_n$, $A_j = a_{1j}e_1 + \cdots + a_{nj}e_n$, y entonces por Teorema 1,

$$\det(A) = (-1)^{j-1} \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \det(e_i, A_1, \ldots, A_{j-1}, A_{j+1}, \ldots, A_n).$$

Pero, intercambiando filas se tiene

$$\det(e_i, A_1, \ldots, A_{j-1}, A_{j+1}, \ldots, A_n) = (-1)^{i-1} \det \begin{pmatrix} 1 & \alpha(i,j) \\ O & M_{11}(B) \end{pmatrix},$$

donde $\alpha(i,j) \in \mathcal{M}_{1\times(n-1)}(\mathbb{K})$ es la fila i de A sin la $j-$ésima componente. Luego, por Lema 4

$$\det(e_i, A_1, \ldots, A_{j-1}, A_{j+1}, \ldots, A_n) = (-1)^{i-1} \det(M_{ij}(A)).$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\det(A) &= \textstyle\sum_{i=1}^n a_{ij}(-1)^{i+j-2}\det(\mathrm{M}_{ij}(A))\\ &= \textstyle\sum_{i=1}^n a_{ij}(-1)^{i+j}\det(\mathrm{M}_{ij}(A))\\ &= \textstyle\sum_{i=1}^n a_{ij}\mathrm{cof}_{ij}(A),\end{aligned}$$

lo cual demuestra (5.1) y de manera análoga se prueba (5.2). ■

Ejemplo 6 Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$. Calcular $|A|$.

Solución. Aplicando (5.2), se tiene

$$\begin{aligned}\det(A) &= 1\cdot(-1)\det\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} + (-2)\cdot 1\det\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}\\ &= \det\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} + (-2)[1\cdot(-1)\det\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + 1(-1)\det\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}]\\ &= -7 + (-2)[4-2]\\ &= -11.\end{aligned}$$

Definición 7 Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. La matriz adjunta de A es la matriz $\mathrm{Adj}(A)$ definida por

$$\mathrm{Adj}(A)(i,j) = \mathrm{cof}_{ji}(A),\ (i,j) \in J_n \times J_n. \tag{7.1}$$

Observación 8 La adjunta de una matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ es la traspuesta de la matriz formada por los cofactores de las componentes de A.

Ejemplo 9 Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. Calcular $\mathrm{Adj}(A)$.

Solución. La traspuesta de la matriz adjunta de A es

$$\mathrm{Adj}(A)^{\mathrm{t}} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -2 \\ -4 & 6 & 7 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto,

$$\mathrm{Adj}(A) = \begin{pmatrix} -2 & -4 & 3 \\ 3 & 6 & 1 \\ -2 & 7 & 3 \end{pmatrix}.$$

Teorema 10 Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Entonces,

(10.1) $\quad A \cdot \mathrm{Adj}(A) = \mathrm{Adj}(A) \cdot A = \det(A) \cdot \mathrm{I}_n.$

Demostración. Sea $A \cdot \mathrm{Adj}(A) = (c_{ij}; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n)$. Calculemos en primer lugar las componentes de la diagonal de esta matriz. Tenemos que para $i \in J_n$,

$$c_{ii} = \sum_{k=1}^{n} A(i,k)\mathrm{cof}_{ik}(A) = \det(A).$$

Esto prueba que los elementos de la diagonal de $A \cdot \mathrm{Adj}(A)$ son iguales a $\det(A)$. Ahora bien, si $i \neq j$ entonces, $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A(i,k)\mathrm{cof}_{jk}(A) = |\widehat{A}|$, donde $\widehat{A}$ es la matriz que se obtiene de A, reeplazando la fila j por la fila i de la matriz A. Luego $|\widehat{A}| = 0$, pues $\widehat{A}$ tiene dos filas iguales. Esto prueba que $A.\mathrm{Adj}(A) = \det(A)\mathrm{I}_n$, y de manera análoga se demuestra que $\mathrm{Adj}(A) \cdot A = \det(A)\mathrm{I}_n$. ■

Corolario 11 Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Si $|A| \neq 0$, entonces A es invertible y además

(11.1) $\quad A^{-1} = \frac{1}{|A|}\mathrm{Adj}(A).$

Ejemplo 12 Sea A la matriz del Ejemplo 9. Calcular $|A|$ y A^{-1}.

Solución. Tenemos que $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, y los cálculos realizados en Ejemplo 9,

(12.1) $\quad \mathrm{Adj}(A) = \begin{pmatrix} -2 & -4 & 3 \\ 3 & 6 & 1 \\ -2 & 7 & 3 \end{pmatrix}.$

Por (10.1), $|A|$ puede obtenerse mutiplicando la fila i de A por la columna i de

$\mathrm{Adj}(A)$ (cualquier $i \in \{1, 2, 3\}$), por ejemplo

$$|A| = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = 11.$$

Ahora bien, por (11.1) y (12.1) se tiene

$$A^{-1} = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} -2 & -4 & 3 \\ 3 & 6 & 1 \\ -2 & 7 & 3 \end{pmatrix}.$$

Teorema 13 (Regla de Cramér.) Sean $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ invertible y $b \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K})$. Entonces, el sistema $Ax = b$ posee una única solución $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ dada para cada $i \in J_n$ por

(13.1) $x_i = \det(A^{i,b})/\det(A)$, donde $A^{i,b}$ es la matriz que se obtiene de A, al reemplazar la columna i de A por la columna b.

Demostración. Claramente, $x = A^{-1}b$ es la única solución del sistema. Este hecho y (11.1) implican que $x = \frac{1}{|A|}\mathrm{Adj}(A)b$.

Luego, para cada $i \in J_n$,

$$\begin{aligned} x_i &= \tfrac{1}{|A|} \textstyle\sum_{k=1}^n \mathrm{Adj}(A)(i,k)b_k \\ &= \tfrac{1}{|A|} \textstyle\sum_{k=1}^n b_k \mathrm{cof}_{ki}(A^{i,b}). \\ &= \tfrac{1}{|A|} \det(A^{i,b}). \end{aligned}$$

.

Esto concluye la demostración. ■

Ejemplo 14 Resolver el sistema siguiente:

$$\left.\begin{array}{ccccccc} x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 1 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 5 \end{array}\right|.$$

Solución. Notemos que la matriz de coeficientes del sistema es $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y que $\det(A) = 4$.

Luego, por la Regla de Cramer se tiene $x_1 = \frac{1}{4} \det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,

$x_2 = \frac{1}{4} \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ y $x_3 = \det \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

Por lo tanto, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ y $x_3 = 2$.

Ejercicios propuestos

1. Sean $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tales que A y B difieren sólo en la $j-$ésima columna. Demuestre que $2^{1-n}|A+B| = |A| + |B|$.

2. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Demuestre que $|A| = |A^{\mathrm{t}}|$ y si A es invertible, calcule $|A^{-1}|$.

Respuesta: $|A^{-1}| = |A|^{-1}$.

3. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ortogonal. Demuestre que $|A| = 1$ ó bien $|A| = -1$.

4. Sea $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ tal que $|A| = 2$. Encuentre el valor de la expresión $\frac{1}{2}|A^{\mathrm{t}}| + 2|A^{-1}| + \frac{1}{8}|A^3| + 4|\frac{1}{2}A|$.

Respuesta: 4.

5. Sea $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Demuestre que si B es antisimétrica y n es impar entonces $|B| = 0$.

6. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ invertible y $U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tal que $U^{\mathrm{t}}AU = A$.

   (6.1) Demuestre que U es invertible.

   (6.2) ¿Es U^{t} invertible? Justifique.

   (6.3) Si U^{t} es invertible, encuentre $|(U^{\mathrm{t}})^{-1}|$.

Respuestas: (6.1) Sí. (6.2) 1 ó -1.

7. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Demuestre que

(7.1) si A no es invertible entonces $A \cdot \mathrm{Adj}(A) = \mathrm{O}$, y

(7.2) $|\mathrm{Adj}(A)| = |A|^{n-1}$.

8. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ y $B = (\mathrm{Adj}(A))^{\mathrm{t}}$. Demuestre que si para algún entero positivo m se tiene $A^m = \mathrm{I}_n$ entonces $B^m = \mathrm{I}_n$.

9. Si $\mathrm{Adj}(A) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -6 & 9 & -1 \\ 8 & -12 & 2 \end{pmatrix}$ y $|A| = 2$, calcule A.

Respuesta: $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

10. Sea $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ definida por $A = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ -1 & k & 3 \\ 1 & 3 & k \end{pmatrix}$.

(10.1) Determine los valores de $k \in \mathbb{R}$ de modo que A sea invertible.

(10.2) Encuentre la inversa, si existe, para $k = 1$ y $k = 3$.

Respuestas:

(10.1) $k \in \mathbb{R} \setminus \{0, 3, -3\}$.

(10.2) Si $k = 1$ entonces A es invertible y $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & -1/8 & 3/8 \\ 1/2 & 3/8 & -1/8 \end{pmatrix}$ y si $k = 3$, A no es invertible.

11. Para el sistema siguiente:

$$\left.\begin{array}{ccccccc} (m+1)x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & a \\ x_1 & + & (m+1)x_2 & + & x_3 & = & b \\ x_1 & + & x_2 & + & (m+1)x_3 & = & c \end{array}\right|,$$

calcule los valores de $m \in \mathbb{R}$ de modo que el sistema tenga solución única.

Respuesta: $m \in \mathbb{R} \setminus \{0, -3\}$.

12. Considere el sistema siguiente:

$$\left.\begin{array}{ccccccc} x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & = & 1 \\ \alpha x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 0 \\ 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & -1 \end{array}\right| .$$

Determine si existen valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ de modo que el sistema tenga infinitas soluciones.

Respuesta: No existe.

13. Dado el sistema siguiente:

$$\left.\begin{array}{ccccccc} mx_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ mx_1 & + & mx_2 & + & x_3 & = & -1 \\ mx_1 & + & x_2 & + & (m+3)x_3 & = & -1 \end{array}\right| .$$

(13.1) Calcule el determinate de la matriz asociada al sistema.

(13.2) Encuentre los valores de $m \in \mathbb{R}$ para los cuales el sistema no tiene solución.

(13.3) Encuentre los valores de $m \in \mathbb{R}$ para los cuales el sistema tiene infinitas soluciones. Determine la forma general de las soluciones.

(13.4) Encuentre los valores de $m \in \mathbb{R}$ para los cuales el sistema tiene solución única y exprese la solución en términos de m.

Respuestas:

(13.1) $m(m-1)(m+2)$.

(13.2) $m = 1$ y $m = -2$.

(13.3) $m = 0$ y

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R}) : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

(13.4) $m \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1, -2\}$, $x_1 = \frac{m+5}{(m-1)(m+2)}$, $x_2 = \frac{-2}{m-1}$ y $x_3 = \frac{-2}{m+2}$.

14. Considere el sistema

$$\left.\begin{array}{ccccccc} ax_1 & + & bx_2 & + & x_3 & = & 1 \\ x_1 & + & abx_2 & + & x_3 & = & b \\ x_1 & + & bx_2 & + & ax_3 & = & 1 \end{array}\right| .$$

(14.1) Calcule el determinante de la matriz asociada al sistema.

(14.2) Determine condiciones sobre a y b en $\mathbb{R}$ para que el sistema tenga solución única y calcule la solución.

(14.3) Encuentre condiciones sobre a y b en $\mathbb{R}$ para que el sistema tenga infinitas soluciones y determine el conjunto de soluciones.

(14.4) Encuentre los valores de a y b en $\mathbb{R}$ para los cuales el sistema no tiene solución.

Respuestas:

(14.1) $b(a-1)^2(a+2)$.

(14.2) $b \neq 0$, $a \neq 1$ y $a \neq -2$, $x_1 = \frac{a-b}{(a-1)(a+2)}$, $x_2 = \frac{ab+b-2}{b(a-1)(a+2)}$ y $x_3 = \frac{a-b}{(a-1)(a+2)}$.

(14.3) $a = 1$, $b = 1$ y

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R}) : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

$a = -2$, $b = -2$ y

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R}) : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1/2 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

(14.4) $b = 0$ ó ($a = 1$ y $b \neq 1$) ó ($a = -2$ y $b \neq -2$).