Pontificia Universidad Católica
de Valparaíso
Instituto de Matemáticas
Junio de 2007

Pauta de Corrección
Prueba N°3 MAT127

1. Sea $M_2(R) \to M_2(R)$, tal que $T\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & b-c \\ c-b & 0 \end{bmatrix}$

a) Demuestre que T es una transformación lineal.

Sean $\alpha \in IR\ y\ v_1 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}; v_2 = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \in M_2(R)\ cualesquiera$

$$T[\alpha v_1 + v_2] = T\left[\begin{pmatrix} \alpha a + x & \alpha b + y \\ \alpha c + z & \alpha d + w \end{pmatrix}\right]$$
$$=\left[\begin{pmatrix} 0 & \alpha b + y - (\alpha c + z) \\ \alpha c + z - (\alpha b + y) & 0 \end{pmatrix}\right]$$
$$=\left[\begin{pmatrix} 0 & \alpha(b-c) + (y-z) \\ \alpha(c-b) + z - y & 0 \end{pmatrix}\right]$$
$$=\left[\begin{pmatrix} 0 & \alpha(b-c) \\ \alpha(c-b) & 0 \end{pmatrix}\right] + \left[\begin{pmatrix} 0 & y-z \\ z-y & 0 \end{pmatrix}\right]$$
$$=\alpha\left[\begin{pmatrix} 0 & (b-c) \\ (c-b) & 0 \end{pmatrix}\right] + \left[\begin{pmatrix} 0 & y-z \\ z-y & 0 \end{pmatrix}\right]$$
$$= \alpha \cdot T(v_1) + T(v_2)$$

b)Encuentre Ker(T) y Nul(T)

$$Ker\ T = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(R) / T\left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}$$
$$= \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(R) / T\left[\begin{pmatrix} a & b-c \\ c-b & 0 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}$$
$$= \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} / a, b, d \in IR\right\}$$
$$= \left\langle\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\rangle$$

Como $B = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$ es l.i. (hay que demostrarlo)

Entonces B es base del Ker(T); por lo tanto **Nul(T)=3**

c)¿$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{-3} \\ \mathbf{3} & \mathbf{2} \end{bmatrix} \in Im\ g(T)? Justifique\ su\ respuesta$

Supongamos que existe $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(R) tal\ que\ T\left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{-3} \\ \mathbf{3} & \mathbf{2} \end{pmatrix}$

$$\left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{-3} \\ \mathbf{3} & \mathbf{2} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & b-c \\ c-b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{-3} \\ \mathbf{3} & \mathbf{2} \end{pmatrix}$$

Luego

1) $b-c=-3$
2) c-b=3
3)0=2

→←

Luego,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{-3} \\ \mathbf{3} & \mathbf{2} \end{bmatrix} \notin Img(T)$$

d) Encuentre Img(T)

Img(T) =$\langle T\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; T\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; T\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; T\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\rangle = \langle\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\rangle$

e) Decida si T es o no un Isomorfismo. Justifique su respuesta.

T no es isomorfismo, ya que T no es inyectiva porque Ker(T)≠ $\{\vec{0}\}$

2- Sean F:$\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ una transformación lineal, tal que $F\big((a,b)\big) = (a+b, b, a)$

Y $[F]_A^B$=$\left[\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right]$, la matriz de la T.L.
Donde $A = \{(1,-1); (0,1)\}$ y $B = \{v_1; v_2; (0,0,5/3)\}$ son bases de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$, respectivamente.

a) Encuentre v_1 y v_2

F((1,-1))=2$\cdot v_1 + 2 \cdot v_2 + 0 \cdot (0,0,5/3)$ ⇔(0,-1,1)= 2$\cdot v_1 + 2 \cdot v_2$ (*)

F((0,1))= 0$\cdot v_1 + 1 \cdot v_2 + 0 \cdot (0,0,5/3)$ ⇔(1,1,0)= v_2

Reemplazando $v_2$en (*): (0,-1,1)= $2v_1 + 2(1,1,0)$ ⇔ $v_1 = \left(-1, -\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$

b) Si $[H]_A^A = \left[\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}\right]$, ¿Es F∘ H una $T.L$ $inyectiva$? $.Justifique$ su $respuesta.$

$$[\mathrm{F} \circ H]_A^B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 8 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\text{Ker}(\text{F} \circ H) = \{\vec{0}_{\mathbb{R}^2}\}$

Por lo tanto $\text{F} \circ H$ es inyectiva.

2. Maximice la siguiente función objetivo: F((x,y))=3x+2y, para x e y números reales, sujeta a las siguientes restricciones:

$$2x + y \leq 18,$$
$$2x + 3y \leq 42,$$
$$x \geq 0, y \geq 0$$

a) Sean u, v, w las variables de Holgura, donde $u \geq 0, v \geq 0, w \geq 0$, el sistema de ecuaciones es:

$$2x + y + u = 18$$
$$2x + 3y + v = 42$$
$$3x + 2y = F$$

La matriz asociada está dad por:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 18 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & 42 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & F \end{pmatrix}$$

b) En relación al "indicador" 3, se obtiene $min\left\{\frac{b_i}{a_j} / \, a_{ij} > 0\right\}$

Para pivotear la columna "1":

$$min\left\{\frac{b_i}{a_j} / \, a_{ij} > 0\right\} = min\left\{\frac{18}{2}, \frac{42}{2}\right\} = \ min\{9{,}21\} = 9$$

El pivote está en la posición $a_{11} = 2$

Efectuando $F_1\left(\frac{1}{2}\right)$ *se obtiene la matriz*:

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 9 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & 42 \\ 8 & 2 & 0 & 0 & F \end{pmatrix} F_{21}(-2), F_{31}(-3) \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 9 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 24 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 0 & F-27 \end{pmatrix} = B$$

c) Se pivotea la columna 2:

$$min\left\{\frac{9}{\frac{1}{2}}, \frac{24}{2}\right\} = min\{18{,}12\} = 12$$

El pivote está en $a_{22} = 2$

$$B \xrightarrow{F_1\left(\frac{1}{2}\right)} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 9 \\ 0 & 1 & -1/2 & 1/2 & 12 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 0 & F-27 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1/4 & 3 \\ 0 & 1 & -1/2 & 1/2 & 12 \\ 0 & 0 & -1 & -1/4 & F-33 \end{pmatrix}$$

d) Volviendo al sistema:

$$1) x + u - \frac{1}{4}v = 3$$
$$2) y - \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}v = 12$$
$$3) - u - \frac{1}{4}v = F - 33$$

e) En la ecuación 3): $F = 33 - u - \frac{1}{4}v$

Como $u \geq 0, v \geq 0, F$ obtiene su máximo valor en "33"
Y ocurre cuando $u = v = 0$
Reemplazando u,v en las ecuaciones (1) y (2) se obtiene x=3;y=12

f) Por lo tanto F toma su máximo valor "33" en P(3,12)