UNIVERSIDAD CATÓLICA DE VALPARAÍSO
INSTITUTO DE MATEMÁTICAS

<u>PAUTA PRUEBA Nº1 MAT-213</u>
15/04/05

I)

1) FALSA, ya que como $AB \neq BA$ se tiene que $AB - BA \neq 0_n$.

2) FALSA, pues si $A \in M_n(\mathbb{R})$, entonces $|-A| = (-1)^n |A|$.

3) FALSA, pues $X = A^{-1}B$.

4) VERDADERA, pues $\left|\left(A^{-1}\right)^T\right| = \left|A^{-1}\right| = \dfrac{1}{|A|}$, con A invertible.

5) VERDADERA, ya que $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -a \\ 0 & 1 & 3 \\ a & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_{31}(-a)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -a \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & a+1 & a^2-1 \end{pmatrix}$.

Por lo tanto $Rg(A) = 3, \forall a \in \mathbb{R} - \{-1\}$.

II)

$$X^T + 2AX - 5I_3 = (BA + X)^T \Rightarrow X^T + 2AX - 5I_3 = (BA)^T + X^T$$
$$\Rightarrow 2AX - 5I_3 = (BA)^T$$
$$\Rightarrow X = \frac{1}{2}A^{-1}\left[(BA)^T + 5I_3\right]$$

Como:

$$(BA)^T = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right]^T = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 \\ 6 & -5 & -1 \\ 4 & -2 & -1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -3 & 6 & 4 \\ -1 & -5 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

y por el método de la adjunta se tiene que:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} -1 & 0 & -4 \\ 1 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & -5 \end{pmatrix}^T = -1\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

entonces:

$$X = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} -3 & 6 & 4 \\ -1 & -5 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 6 & 4 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & 5 & 10 \\ 1 & 0 & 2 \\ 17 & 19 & 44 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5/2 & 5 \\ 1/2 & 0 & 1 \\ 17/2 & 19/2 & 22 \end{pmatrix}$$

III)
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -2 & 4 \\ 4 & 3 & -1 & 5 \\ 2 & 2 & a & b+1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_{31}(-1)]{F_{21}(-2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & a+2 & b-3 \end{array}\right) \xrightarrow{F_{32}(-1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & a-1 & b \end{array}\right)$$

1) El sistema tiene única solución, si $(a \neq 1) \wedge (b \in \mathbb{R})$, y están dadas por:
$$x = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 5 & 3 & -1 \\ b+1 & 2 & a \end{vmatrix}}{2(a-1)}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 4 & 5 & -1 \\ 2 & b+1 & a \end{vmatrix}}{2(a-1)}, \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & 5 \\ 2 & 2 & b+1 \end{vmatrix}}{2(a-1)}$$
donde $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 4 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & a \end{vmatrix} = 2(a-1)$.

2) El sistema es inconsistente si $(a=1) \wedge (b \neq 0)$.

3) El sistema tiene infinitas soluciones si $(a=1) \wedge (b=0)$. En este caso se tiene:
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_{12}(-1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -5 & 7 \\ 0 & 1 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$
Haciendo $z = t$, se tiene que $x = \frac{7+5t}{2}$; $y = -3-3t$, por lo cual el conjunto solución está dado por:

$$S = \left\{ \left(\frac{7+5t}{2}, -3-3t, t \right) \in \mathbb{R}^3 \ / \ t \in \mathbb{R} \right\}$$
$$S = \left\{ \left(\frac{7}{2}, -3, 0 \right) + t \left(\frac{5}{2}, -3, 1 \right) \in \mathbb{R}^3 \ / \ t \in \mathbb{R} \right\}$$