Soluciones Guía Nº1

1) Primero debemos tener en consideración las siguientes propiedades:

$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ $\quad (AB)^t = B^tA^t$

$(A^t)^t = A$ $\quad (A^{-1})^{-1} = A$

Luego:

$(A^TX^T)^{-1} - (X^TA^{-1})^{-1} + (X^{-1}A^T)^T = I_2$

$(X^T)^{-1}(A^T)^{-1} - (A^{-1})^{-1}(X^T)^{-1} + (A^T)^T(X^{-1})^T = I_2$

$(X^T)^{-1}(A^T)^{-1} - A(X^T)^{-1} + A(X^{-1})^T = I_2$

$(X^T)^{-1}(A^T)^{-1} - A(X^{-1})^T + A(X^{-1})^T = I_2$

$(X^T)^{-1}(A^T)^{-1} = I_2$

Pero A es regular, luego A^T también lo es

$(X^T)^{-1} = A^T$

$X^T = (A^T)^{-1}$

De donde $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $(A^T)^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

Así $X^T = (A^T)^{-1}$

$X^T = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ Por lo tanto, $X = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

2) Análogamente a lo anterior, realicemos arreglos algebraicos según la base de las propiedades matriciales

$(B^TC^T)^T + (X^{-1}C^{-1})^{-1} = (AC^{-1})^{-1} - CB^T$

$(C^T)^T(B^T)^T + (C^{-1})^{-1}(X^{-1})^{-1} = (C^{-1})^{-1}(A)^{-1} - CB^T$

$CB + CX = CA^{-1} - CB^T$

$C[B+X] = C[A^{-1} - B^T]$ Pero se sabe que C es regular, luego $\exists! C^{-1} \in M_3(IR)$

$C^{-1}C[B+X] = C^{-1}C[A^{-1} - B^T]$

$B + X = A^{-1} - B^T$ Además, se sabe que B es antisimétrica, es decir, $B = -B^T$

$-B^T + X = A^{-1} - B^T$

$X = A^{-1}$

De donde, $A = \begin{pmatrix} -5 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, entonces $A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & -1 & 0 \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{5}{3} \end{pmatrix}$

Así $X = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & -1 & 0 \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{5}{3} \end{pmatrix}$

3) Verdadero o falso.

a) Verdadero

Por ver si $(A+B) = (A+B)^T$

Por propiedades se tiene que $(A+B)^T = A^T + B^T$

Pero A y B son simétricas, es decir, $A = A^T$ y $B = B^T$. Luego

$(A+B)^T = A^T + B^T = A + B$

Por lo tanto $(A+B) = (A+B)^T$

b) Falso.

Toda matriz de orden n tal que $\det(A) \neq 0$ tiene inversa.

Contraejemplo: Sea $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 10 & 4 \end{pmatrix}$ tal que $A \in M_2(IR)$

donde $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 10 & 4 \end{pmatrix} \backsim \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Luego A es singular

c) Verdadero.

Análogamente, $\det(A) = 8 - 2\alpha$

En particular, si $\alpha = 2$, $\det(A) = 4$. Luego, A es regular.

En general, A es invertible $\forall \alpha \in IR - \{4\}$

d) Verdadero.

Por teorema se tiene que

A es regular $\Rightarrow A \to I_m$ lo cual es equivalente a $\left[(p \Rightarrow q) \leftrightarrow (\overline{q} \Rightarrow \overline{p})\right]$

$A \nrightarrow I_m \Rightarrow A$ es singular

Pero $A \to B \wedge A \nrightarrow I_m$

Luego, por simetría y transitividad $B \nrightarrow I_m$

Por lo tanto, B es singular.

e) Falso

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \underset{f_{21}(2)}{\widetilde{\quad}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \underset{f_{31}(-1)}{\widetilde{\quad}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{f_{2}(-1)}{\widetilde{\quad}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{f_{12}(1)}{\widetilde{\quad}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{f_{13}(2)}{\widetilde{\quad}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{f_{23}(3)}{\widetilde{\quad}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Luego, como la *ERF* no tiene filas nulas se tiene que $Rg(A) = 3$

f) Falso

$$A(2B) = 2(AB) = 2\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} 2 \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} = (12)$$

g) Verdadero

Por los datos entregados tenemos que:

$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad (AB)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$

y se desprende que: $\quad A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$

Luego:

$$(AB)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow B^{-1}A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} A$$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \Leftrightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{7}{3} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{14} & \frac{3}{7} \end{pmatrix}$$

h) **Falso**

Esto ocurre *ssi* las matrices conmutan, luego

$(A+B)^2 = (A+B)(A+B)$ multiplicando matriz a matriz, nos queda

$(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$

4.a) A es invertible *ssi* $\det(A) \neq 0$. Luego

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - (-1) \cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$= 1 \cdot (2+1) + 1 \cdot (-4-4) + 1 \cdot (2-1) = 3 - 5 + 1 = -1$

Por lo tanto, A es invertible.

b) $$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{f_{21}(2) \\ f_{31}(-1)}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{f_2(-1) \\ f_{12}(1)}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{f_{13}(2) \\ f_{23}(3)}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Por lo tanto $A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 2 \\ -5 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

c)

i) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{f_{21}(2)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E_{21}(2)$

ii) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{f_{31}(-1)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E_{31}(-1)$

iii) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \widetilde{f_{22}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E_{22}(-1)$

iv) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \widetilde{f_{12}(1)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E_{12}(1)$

v) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \widetilde{f_{13}(2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E_{13}(2)$

vi) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \widetilde{f_{23}(3)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E_{23}(3)$

Así, $A^{-1} = E_{23}(3) \cdot E_{13}(2) \cdot E_{12}(1) \cdot E_{22}(-1) \cdot E_{31}(-1) \cdot E_{21}(2) =$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -3 & -1 & 2 \\ -5 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5.a) Si $A = \begin{pmatrix} \cos a & \sin a \\ -\sin a & \cos a \end{pmatrix}$ entonces

$$A^2 = \begin{pmatrix} \cos^2 a - \sin^2 a & 2\cos a \sin a \\ -2\cos a \sin a & \cos^2 a - \sin^2 a \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} (\cos^2 a - \sin^2 a)\cos a - 2\cos a \sin^2 a & (\cos^2 a - \sin^2 a)\sin a + 2\cos^2 a \sin a \\ -2\cos^2 a \sin a - (\cos^2 a - \sin^2 a)\sin a & (\cos^2 a - \sin^2 a)\cos a - 2\cos a \sin^2 a \end{pmatrix}$$

5.b) $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 4 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 4 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ Por lo tanto, A es involutiva

$B^2 = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \\ -4 & -4 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \\ -4 & -4 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ Por lo tanto, B es involutiva

6)

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$ Por lo tanto, A es idempotente

$$B = I - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$B^2 = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$ Por lo tanto, B es idempotente

7) Si $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ se obtiene que $A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$, luego

$$B^{-1} = (AA^T)^{-1} = (A^T)^{-1}A^{-1} = (A^{-1})^TA^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}^T\begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

8) Si a $A^2 = A$ le aplicamos la función determinante, nos queda

$|A^2| = |A| \Leftrightarrow |A|^2 = |A|$

Sea $|A| = a$ entonces, reemplazando

$a^2 = a \Leftrightarrow a^2 - a = 0 \Leftrightarrow a(a-1) = 0 \Leftrightarrow a = 1 \vee a = 0$

Finalmente, de lo anterior, $|A| = 1 \veebar |A| = 0$

9) a) $|3A| = 3^n|A| = 3^n \cdot \frac{-1}{2} = \frac{-3^n}{2}$

(Ya que, $|cA| = c^n|A|$, donde n es el orden de A)

b) $|A^3| = |A|^3 = (\frac{-1}{2})^3 = \frac{-1}{8}$

c) $|(4B)^{-1}| = \left|\frac{1}{4}B^{-1}\right| = (\frac{1}{4})^n|B^{-1}| = (\frac{1}{4})^n\frac{1}{|B|} = \frac{1}{4^n}\frac{1}{\sqrt{3}}$

10) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & -5 & 4 \\ 1 & 2 & -7 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} -5 & 4 \\ 2 & -7 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -7 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$

$= 2 \cdot (35-8) - 1 \cdot (-21-4) = 2 \cdot 27 - 1 \cdot -25 = 79$

11) Se sabe que $A^{-1} = \frac{1}{|A|}adj(A)$

de donde $Adj(A) = \begin{pmatrix} \cos a & -\sin a & 0 \\ \sin a & \cos a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} \cos a & \sin a & 0 \\ -\sin a & \cos a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

y $\det(A) = \cos^2 a + \sin^2 a = 1.$ Luego

$$A^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} \cos a & \sin a & 0 \\ -\sin a & \cos a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos a & \sin a & 0 \\ -\sin a & \cos a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

12)

a) $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$

i) $\left[\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\right]^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 6 & 15 \end{pmatrix}$

ii) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^2 + 2\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^2$

$= \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 7 & 16 \end{pmatrix}$

Por lo tanto, para A y B dadas, $(A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$

b) $(A-B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$

i) $\left[\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\right]^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

ii) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^2 - 2\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^2$

$= \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

Por lo tanto, para A y B dadas, $(A-B)^2 \neq A^2 - 2AB + B^2$

13) $A^2 - 3A - I_2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^2 - 3\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 7 & 9 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Por lo tanto, $A^2 - 3A - I_2 = 0_2$

14) $A \cdot X \cdot B = C$

Como $\det(B) = 1 \neq 0$, entonces B es regular.

Además, $A = I_2$

Luego $A \cdot X \cdot B = C \Leftrightarrow X = CB^{-1}$

de donde $B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Luego

$$X = CB^{-1} \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

15) Por ver que $AB = BA$

i) $\begin{pmatrix} \cos a & -\sin a \\ \sin a & \cos a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos b & -\sin b \\ \sin b & \cos b \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} \cos a\cos b - \sin a\sin b & -\cos a\sin b - \sin a\cos b \\ \sin a\cos b + \cos a\sin b & \cos a\cos b - \sin a\sin b \end{pmatrix}$$

$ii)\begin{pmatrix} \cos b & -\sin b \\ \sin b & \cos b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos a & -\sin a \\ \sin a & \cos a \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} \cos a\cos b - \sin a\sin b & -\cos a\sin b - \sin a\cos b \\ \sin a\cos b + \cos a\sin b & \cos a\cos b - \sin a\sin b \end{pmatrix}$$

Por lo tanto $AB = BA$

16)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & t \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{pmatrix} \widetilde{f_{21}(-2)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & t \\ 0 & 0 & 0 & 8-2t \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{pmatrix} \widetilde{f_{31}(-3)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & t \\ 0 & 0 & 0 & 8-2t \\ 0 & 0 & 0 & 12-3t \end{pmatrix}$$

Luego si $8 - 2t = 0 \ \wedge \ 12 - 3t = 0 \ \Leftrightarrow \ t = 4$

Por lo tanto, si $t = 4$, $Rg(A) = 1$

Ahora, si $t \neq 4$ entonces quiere decir que debemos seguir buscando la *ERF*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & t \\ 0 & 0 & 0 & 8-2t \\ 0 & 0 & 0 & 12-3t \end{pmatrix} \widetilde{f_2\left(\tfrac{1}{8-2t}\right)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 12-3t \end{pmatrix}$$

$$\widetilde{f_{32}(-12+3t)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \widetilde{f_{12}(-t)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

En conclusión:

Si $t = 4$, $Rg(A) = 1$

Si $t \neq 4$, $Rg(A) = 2$

17) $AX - B = X \Leftrightarrow AX - X = B \Leftrightarrow (A - I)X = B$

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]X = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}X = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Donde la matriz $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$, es invertible, con $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$

entonces:

$$X = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} \frac{10}{3} & -1 \\ \frac{7}{2} & -1 \end{pmatrix}$$

18) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \log 3 & \log 30 & \log 300 \\ (\log 3)^2 & (\log 30)^2 & (\log 300)^2 \end{vmatrix}$

$= 1\begin{vmatrix} \log 30 & \log 300 \\ (\log 30)^2 & (\log 300)^2 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} \log 3 & \log 300 \\ (\log 3)^2 & (\log 300)^2 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} \log 3 & \log 30 \\ (\log 3)^2 & (\log 30)^2 \end{vmatrix}$

$= [\log 30(\log 300)^2 - (\log 30)^2 \log 300] - [\log 3(\log 300)^2 - (\log 3)^2 \log 300]$
$+[\log 3(\log 30)^2 - (\log 3)^2 \log 30]$

Pero por propiedades de logarítmo tenemos que:

$\log 30 = \log(3 \cdot 10) = \log 3 + \log 10 = \log 3 + 1$
$\log 300 = \log(3 \cdot 100) = \log 3 + \log 100 = \log 3 + 2$

Luego

$= [\log 30(\log 300)^2 - (\log 30)^2 \log 300] - [\log 3(\log 300)^2 - (\log 3)^2 \log 300]$
$+[\log 3(\log 30)^2 - (\log 3)^2 \log 30]$
$= (\log 3 + 1)(\log 3 + 2)^2 - (\log 3 + 1)^2(\log 3 + 2) - \log 3(\log 3 + 2)^2$
$+(\log 3)^2(\log 3 + 2) + \log 3(\log 3 + 2)^2 - (\log 3)^2(\log 3 + 2)$
$= (\log 3 + 1)(\log 3 + 2)^2 - (\log 3 + 1)^2(\log 3 + 2)$
$= (\log 3 + 1)(\log 3 + 2)[(\log 3 + 2) - (\log 3 + 1)]$
$= (\log 3 + 1)(\log 3 + 2)$
$= (\log 3)^2 + 3\log 3 + 2$

19)La matriz inversa, obtenida mediante la adjunta, está definida como:

$A^{-1} = \frac{1}{|A|}Adj(A)$

Ahora, con $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, se tiene que:

$|A| = -4$

$$Adj(A) = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -2 \\ 10 & -8 & 4 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -3 & 10 & 1 \\ 2 & -8 & -2 \\ -2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Así, reemplazando:

$$A^{-1} = \frac{1}{-4}\begin{pmatrix} -3 & 10 & 1 \\ 2 & -8 & -2 \\ -2 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{5}{2} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

20) $\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1+c \end{vmatrix}$

$= (1+a)\begin{vmatrix} 1+b & 1 \\ 1 & 1+c \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1+c \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 1 & 1+b \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$

$= (1+a)[(1+b)(1+c)-1]-[1+c-1]+[1-(1+b)]$
$= (1+a)(1+b)(1+c)-(1+a)-c+[1-1-b]$
$= (1+a)(1+b)(1+c)-(1+a)-c-b$
$= (1+a)[1+b+c+bc]-1-a-c-b$
$= 1+b+c+bc+a+ab+ac+abc-1-a-c-b$
$= abc+ab+ac+bc$
$= abc(1+\frac{1}{c}+\frac{1}{b}+\frac{1}{a})$
$= abc(1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})$

22) $\begin{pmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & a+c \\ 1 & c & a+b \end{pmatrix} \overset{\displaystyle\frown}{\substack{f_{21}(-1) \\ f_{31}(-1)}} \begin{pmatrix} 1 & a & b+c \\ 0 & b-a & a-b \\ 0 & c-a & a-c \end{pmatrix}$

$\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 0 & b-a & a-b \\ 0 & c-a & a-c \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} b-a & a-b \\ c-a & a-c \end{vmatrix}$

$= (b-a)(a-c)-(c-a)(a-b)$
$= (b-a)(a-c)-(b-a)(a-c) = 0$

Por lo tanto $\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & a+c \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} = 0$

23) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ x & 1 & 3 & 4 \\ x & 1 & -7 & 3 \end{vmatrix}$

$= 1\cdot\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & -7 & 3 \end{vmatrix} - 1\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ x & 3 & 4 \\ x & -7 & 3 \end{vmatrix}$

$+1\cdot\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ x & 1 & 4 \\ x & 1 & 3 \end{vmatrix} - 1\cdot\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ x & 1 & 3 \\ x & 1 & -7 \end{vmatrix}$

de donde: $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & -7 & 3 \end{vmatrix} = -56$ $\qquad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ x & 3 & 4 \\ x & -7 & 3 \end{vmatrix} = 74-19x$

$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ x & 1 & 4 \\ x & 1 & 3 \end{vmatrix} = -2-x$ $\qquad \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ x & 1 & 3 \\ x & 1 & -7 \end{vmatrix} = -20-10x$

Así, nos queda:
$-56-(74-19x)+(-2-x)-(-20-10x) = 0$
$-56-74+19x-2-x+20+10x = 0$

$$28x - 112 = 0 \Leftrightarrow 28x = 112 \Leftrightarrow x = \tfrac{112}{28} \Leftrightarrow x = 4$$

24) $$\begin{vmatrix} m & m & m & m \\ m & c & c & c \\ m & c & b & b \\ m & c & b & a \end{vmatrix} \widetilde{\begin{matrix} f_{21}(-1) \\ f_{31}(-1) \end{matrix}} \begin{vmatrix} m & m & m & m \\ 0 & c-m & c-m & c-m \\ 0 & c-m & b-m & b-m \\ m & c & b & a \end{vmatrix}$$

$$\widetilde{f_{41}(-1)} \begin{vmatrix} m & m & m & m \\ 0 & c-m & c-m & c-m \\ 0 & c-m & b-m & b-m \\ 0 & c-m & b-m & a-m \end{vmatrix} = m \begin{vmatrix} c-m & c-m & c-m \\ c-m & b-m & b-m \\ c-m & b-m & a-m \end{vmatrix}$$

$$\widetilde{\begin{matrix} f_{21}(-1) \\ f_{31}(-1) \end{matrix}}\; m \begin{vmatrix} c-m & c-m & c-m \\ 0 & b-c & b-c \\ 0 & b-c & a-c \end{vmatrix} = m(c-m) \begin{vmatrix} b-c & b-c \\ b-c & a-c \end{vmatrix}$$

$$= m(c-m)[(b-c)(a-c) - (b-c)^2] = m(c-m)(b-c)[(a-c) - (b-c)]$$
$$= m(c-m)(b-c)[a-c-b+c] = m(c-m)(b-c)(a-b)$$
$$= m(m-c)(b-a)(b-c)$$

27) $$\begin{vmatrix} 2 & a & 5 \\ 4 & a^2 & 13 \\ 8 & a^3 & 35 \end{vmatrix}$$ con $a = 3$, luego

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & 9 & 13 \\ 8 & 27 & 35 \end{vmatrix} \widetilde{\begin{matrix} f_{21}(-2) \\ f_{31}(-4) \end{matrix}} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 15 & 15 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 15 & 15 \end{vmatrix} = 2[3 \cdot 15 - 3 \cdot 15] = 0$$

28) $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1+b \end{vmatrix} \widetilde{\begin{matrix} f_{21}(-1) \\ f_{31}(-1) \end{matrix}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{vmatrix} = ab$$